9.3. Funkcija troškova

Označimo sa X neki proizvod. Ako sa T označimo ukupne troškove proizvodnje tog proizvoda, sa x fizički obim proizvodnje, sa $p_1, p_2, \cdots, p_n$ cene faktora proizvodnje, onda se funkcija ukupnih troškova T može izraziti kao funkcija više promenljivih

$$T = \Phi(x, p_1, p_2, \cdots, p_n).$$

Zbog jednostavnijeg proučavanja funkcije troškova, cene faktora proizvodnje ćemo smatrati konstantnim, a funkciju troškova ćemo posmatrati kao funkciju od jedne promenljive x (obima proizvodnje) $T = T(x)$. Kako se troškovi sastoje od fiksnih T_F (troškovi koji postoje i kad se ništa ne proizvodi) i varijabilnih T_V (troškovi koji zavise od fizičkog obima proizvodnje), funkciju troškova možemo izraziti kao

$$T = T_V(x) + T_F = T(x)$$

Da bi funkcija zadata prethodnom formulom bila funkcija ukupnih troškova potrebno je da zadovolajva i sledeće uslove:

1) oblast definisanosti funkcije je $Df = \{[0,b] \mid b \in R^+ \wedge (\forall x \in [0,b]) T(x) > 0\}$, i troškovi kao ekonomska veličina moraju biti veći od nule;
2) $T(0) = T_F$;
3) Funkcija troškova mora biti diferencijabilna i monotono rastuća na (0, b) $(\forall x \in (a,b)) T'(x) = T_V'(x) > 0$. Ovo proizilazi iz osobine da troškovi rastu sa porastom obima proizvodnje;

Neka je $x_0 \in (0,b)$ i neka je Δx takvo da $x_0 + \Delta x \in (0,b)$. Ako se obim proizvodnje poveća sa nivoa x_0 za Δx, onda će se ukupni troškovi povećati sa nivoa $T(x_0)$ za

$$\Delta T = T(x_0 + \Delta x) - T(x_0).$$

Definicija* 2.** Neka je $T = T(x)$ funkcija ukupnih troškova definisana na intervalu nenegativnih brojeva $[0,b]$. ***Granični troškovi u tački $x_0 \in (0,b)$, u oznaci $T_G(x_0)$ su jednaki graničnoj vrednosti

$$T_G(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{T(x_0 + \Delta x) - T(x_0)}{\Delta x}$$

ako ona postoji i ako jeste konačna.

Na osnovu definicije izvoda funkcije zaključujemo da je $T_G(x_0) = T'(x_0)$. Kako je funkcija $T = T(x)$ diferencijabilna na intervalu (0, b) sledi da je

$$T_G(x) = T'(x) = \frac{dT}{dx}, (\forall x \in (0,b)).$$

Ekonomska interpretacija graničnih troškova je sledeća: Ako se fizički obim proizvodnje poveća sa nivoa x_0 za jedinicu, granični troškovi će se povećati približno za $T_G(x_0)$.
Ukoliko nam je poznata funkcija graničnih troškova, možemo odrediti funkciju ukupnih troškova na sledeći način

$$T_G(x) = \frac{dT}{dx} \Rightarrow dT = T_G(x) \cdot dx \Rightarrow T = \int T_G(x) \cdot dx + C.$$

Integracionu konstantu *C* određujemo iz uslova da je $T(0) = T_F = C$.
Prosečni troškovi su troškovi po jedinici proizvoda i određuju se po formuli

$$\overline{T}(x) = \frac{T(x)}{x}.$$

Primer 1. Neka je $T_G(x) = 6x + 200$ funkcija graničnih troškova proizvodnje nekog proizvoda *X*, a fiksni troškovi iznose 3 000 000 novčanih jedinica. Odrediti nivo proizvodnje za koji se ostvruju minimalni prosečni troškovi, a potom i veličinu tih troškova.

$$T_G(x) = 6x + 200 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = 6x + 200 \Rightarrow T = \int (6x + 200)dx = 3x^2 + 200x + C$$

$$C = T(0) = 3000000 \Rightarrow T(x) = 3x^2 + 200x + 3000000$$

$$\overline{T}(x) = 3x + 200 + \frac{3000000}{x}$$

$$\overline{T}'(x) = 3 - \frac{3000000}{x^2} = \frac{3x^2 - 3000000}{x^2} = \frac{3(x^2 - 1000000)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1000$$

Za $x \in (0,1000), T(x) < 0$, a za $x \in (1000,+\infty), T(X) > 0$, što znači da funkcija prosečnih troškova postiže minimum za *x* = 1000. Znači minimalni prosečni troškovi proizvodnje su na nivou 1000 komada i $\overline{T}_{\min} = \overline{T}(1000) = 3000 + 200 + 3000 = 6200$.

9.4. Funkcija dobiti

Dobit ostvarena u proizvodnji nekog proizvoda X, u oznaci *D*, definiše se kao razlika prihoda *P* i troškova *T*

$$D = P - T.$$

Ako su za neki proizvod poznate funkcija prihoda, funkcija troškova i funkcija tražnje $x = f(p)$, funkciju dobiti možemo izraziti kao funkciju od jedne promenljive

$$D = D(x) = P(x) - T(x) \text{ ili}$$

$$D = D(p) = p \cdot f(p) - T(f(p))$$

Neka su za neki proizvod *X*, funkcija prihoda $P = P(x)$ i funkcija troškova $T = T(X)$ definisane na intervalu $(0, b) \in R^+$. Interval $(x_1, x_2) \subset (0, b)$ za koji važi

$$\left(\forall x \in (x_1, x_2)\right)\left(D(x) = P(x) - T(x) > 0\right)$$

naziva se ***interval rentabilnosti***. Granice ovog intervala određuju se iz uslova $D(x) = 0$ i interval $(x_1, x_2) \subset (0, b)$ predstavlja oblast definisanosti.

Pošto su funkcije prihoda i troškova diferencijabilne na intervalu (0,*b*) onda je i funkcija dobiti diferencijabilna na tom intervalu. Zanimljiv je nivo proizvodnje x_0 pri kojem se ostvaruje maksimalna dobit. On se određuje iz uslova $D'(x_0) = 0$ i $D''(x_0) < 0$ na osnovu teoreme o ekstremnim vrednostima.

Obim proizvodnje $x_0 \in (x_1, x_2)$ za koji se ostvrauje maksimalna dobit $D_{\max} = D(x_0)$ naziva se ***optimalna proizvodnja***, a cena $p_0 = f^{-1}(x_0)$ naziva se ***optimalna prodajna cena***.

Primer 1. Neka je za proizvod *X* poznata funkcija tražnje $x = -0{,}5p + 11000$ i funkcija ukupnih troškova $T(x) = 2x^2 + 10 \cdot 10^6$. Odrediti interval rentabilnosti, optimalni obim proizvodnje, optimalnu cenu i maksimalnu dobit.

$$x = -0{,}5p + 11000$$

$$p = -2x + 22000$$

$$P(x) = x \cdot p = x(-2x + 22000) = -2x^2 + 22000x$$

$$D(x) = P(x) - T(x) = -2x^2 + 22000x - (2x^2 + 10 \cdot 10^6) = -4x^2 + 22000x - 10 \cdot 10^6$$

Interval rentabilnosti je interval nenegativnih brojeva na kojem je funkcija dobiti pozitivna.
Da bismo odredili ovaj interval, odredićemo najpre nule funkcije dobiti.
Funkcija dobiti je kvadratna funkcija pa izračunavamo rešenja kvadratne jednačine.

$$x_{1,2} = \frac{-22000 \pm \sqrt{484 \cdot 10^6 - 160 \cdot 10^6}}{-8} = \frac{-22000 \pm \sqrt{324 \cdot 10^6}}{-8} = \frac{-22000 \pm 18000}{-8}$$

$$x_1 = \frac{-22000 + 18000}{-8} = 500 \quad x_2 = \frac{-22000 - 18000}{-8} = 5000$$

Dakle interval rentabilnosti je (500, 5000) jer je na to intervalu kvadratna funkcija $-4x^2 + 22000x - 10 \cdot 10^6$ veća od nule.

Optimalni obim proizvodnje je onaj za koji se ostvaruje maksimalna dobit. Da bi odredili maksimum funkcije dobiti potrebno ja da nađemo njen prvi izvod i odredimo nule prvog izvoda.

$D'(x) = -8x + 22000 \quad D'(x) = 0 \Leftrightarrow -8x + 22000 = 0 \Leftrightarrow x = 2750$

Za $x = 2750$ funkcija ima ekstremnu vrednost, a na osnuvu znaka drugog izvoda za tu vrednost određujemo da li se radi o minimumu ili maksimumu.

$D''(x) = -8 < 0$. Drugi izvod je konstantna funkcija, manja od nule za bilo koje x pa prema tome i za $x = 2750$. Dakle maksimalna dobit se ostvaruje za obim proizvodnje $x_0 = 2750$.
Iznos maksimalne dobiti izračunavamo $D_{\max} = D(2750) = 20250000$.
Optimalnu cenu izračunavamo $p_0 = -2x_0 + 22000 = -2 \cdot 2750 + 22000 = 16500$.

Zadaci

1. Neka je $P_G(x) = -x + 24000$ funkcija graničnih prihoda, a funkcija graničnih troškova $T_G(x) = 3x$ za neki proizvod *X*. Odrediti optimalni obim proizvodnje i maksimalnu zaradu (dobit), pod uslovom da su fiksni troškovi 64 miliona novčanih jedinica.
2. Neka su za neki proizvod *X* date funkcija tražnje $x = -0{,}2p + 100$ i funkcija prosečnih troškova $\overline{T} = 2{,}5x + 350 + 250x^{-1}$. Odredi interval rentabilne proizvodnje, optimalnu količinu proizvodnje i optimalnu prodajnu cenu.
3. Date su redom $P_\Gamma(x) = -3x^2 + 40x + 800$ i $\overline{T}(x) = x^2 + 14x + 2400x^{-1}$, funkcija graničnih prihoda i funkcija prosečnih troškova za neki proizvod, gde x predstavlja količinu tog proizvoda. Naći interval rentabilnosti proizvodnje.
4. Neka je $p = -0{,}001x + 80$ funkcija tražnje za neki proizvod i $T(x) = 30x + 10^5$ funkcija ukupnih troškova proizvodnje. Naći cenu p pri kojoj se ostvaruje maksimalna dobit i izračunati tu dobit.
5. Za neki proizvod date su funkcija tražnje $x = -2p + 12000$ i funkcija prosečnih troškova $\overline{T}(x) = 2x - 4000 + \dfrac{1000000}{x}$. Za koju cenu p se ostvaruje maksimalna dobit i kolika je ta dobit?
6. Data je funkcija tražnje $x = 90 - 2p$ i funkcija prosečnih troškova $\overline{T} = x^2 - 8x + 57 + \dfrac{2}{x}$. Naći nivo proizvodnje pri kojem se ostvaruje

   a) maksimalan prihod

   b) minimalni granični troškovi

   c) maksimalna dobit.

10. FINANSIJSKA MATEMATIKA

10.1. Procentni račun

Osnovne veličine procentnog računa su ***glavnica, procentna stopa i procentni prinos*** (iznos).
Glavnica G, predstavlja osnovnu vrednost na koju se izračunavaju povećanja ili smanjenja za zadatu procentnu stopu.
Procentna stopa p, predstavlja broj koji pokazuje za koliko se jedinica menja (povećava ili smanjuje) glavnica na svakih svojih 100 jedinica.
Procentni prinos (iznos) P, predstavlja veličinu koja pokazuje ukupnu promenu glavnice ***G*** pri procentnoj stopi ***p***.

Procentna stopa se može izraziti u procentima ***p***% ili u decimalnom zapisu $\frac{p\%}{100}$. Tako procentnom zapisu 36% odgovara decimalni zapis 0,36. Kako je decimalni zapis podesniji, upotrebljavaćemo procentnu stopu ***p*** u njenom decimalnom zapisu.

Procentni račun od sto

Odnos između veličina ***G***, ***p*** i ***P*** je dat proporcijom

$\boldsymbol{G : P = 100 : p}$

znajući da su pri konstantnoj stopi ***p***, veličine ***G*** i ***P*** su direktno proporcionalne, tj. pri konstantnoj kamatnoj stopi, što je veća glavnica veći je i procentni prinos.

Iz ove proporcije se dobija $G = \frac{P \cdot 100}{p}$, $P = \frac{G \cdot p}{100}$ i $p = \frac{P \cdot 100}{G}$

Za procentnu stopu datu u decimalnom zapisu proporcija dobija oblik

$\boldsymbol{G : P = 1 : p}$

odakle je $G = \frac{P}{p}$, $P = G \cdot p$ i $p = \frac{P}{G}$.

Primer 1. Od 76 studenata koji su polagali neki ispit, 20 ih je položilo sa ocenom 10. Izrazi to u procentima.

Rešenje. $G = 76$, $P = 20 \Rightarrow p = \frac{P}{G} = 0{,}26316$, $p = 26{,}316\%$.

Primer 2. Nabavna cena je povećana po stopi od 18% za iznos poreza na promet. Nakon toga je povećana još za 17%, tako da je cena robe 236 dinara. Izračunati kolika je nabavna cena.

Rešenje. Ako nabavnu cenu obeležimo sa G, a stopu poreza $p_1 = 0{,}18$, veličina poreza je $P = G \cdot p_1 = 0{,}18G$, pa je prodajna cena $G_1 = G + P = 1{,}18G$. Poskupljenje $p_2 = 17\%$ izračunavamo na osnovicu G_1. Iznos poskupljenja je $P_1 = G_1 \cdot 0{,}17 = 0{,}17 \cdot 1{,}18G = 0{,}2006G$, pa je konačna cena $G_2 = G_1 + P = 1{,}18G + 0{,}2006G = 1{,}3806G$. Kako je konačna cena $G_2 = 236, G = 236/1{,}3806 = 170{,}94$.

Procentni račun niže sto i procentni račun više sto

Često se u praktičnim problemima umesto glavnice ***G*** javlja uvećana ***G*** + ***P*** ili umanjena ***G*** – ***P*** glavnica za odgovarajući procentni prinos ***P*** po zadatoj stopi ***p***. Na osnovu datih ***G*** + ***P*** ili ***G*** – ***P***, nepoznata glavnica ***G*** ili nepoznat prinos ***P*** se ne mogu izračunati primenom prethodnih formula. Ako početnu proporciju ***G* : *P* = 100 : *p*** zapišemo u obliku razlomka $\frac{G}{P} = \frac{100}{p}$, pa zatim dodamo (oduzmemo) levoj i desnoj strani 1, $\frac{G}{P} \pm 1 = \frac{100}{p} \pm 1$, svođenjem na najmanji zajednički sadržalac dobijamo $\frac{G \pm P}{P} = \frac{100 \pm p}{p}$, što je ekvivalentno $\frac{G \pm P}{100 \pm p} = \frac{P}{p} = \frac{G}{100}$. Odatle sledi $G = \frac{(G \pm P) \cdot 100}{100 \pm p}$, $P = \frac{(G \pm P) \cdot p}{100 \pm p}$, $p = \frac{(100 \pm p) \cdot P}{G \pm P}$.

Ukoliko se za procentnu stopu koristi decimalni zapis, iz početne proporcije $G : P = 1 : p$, zapisane u vidu razlomka $\frac{G}{P} = \frac{1}{p}$, dodavanjem (oduzimanjem) jedinice levoj i desnoj strani dobijamo $\frac{G}{P} \pm 1 = \frac{1}{p} \pm 1$. Svođenjem na najmanji zajednički sadržalac, jednakost dobija oblik $\frac{G \pm P}{P} = \frac{1 \pm p}{p} \Rightarrow \frac{G \pm P}{1 \pm p} = \frac{P}{p} = G$, odakle se mogu izraziti $G = \frac{G \pm P}{1 \pm p}$, $P = \frac{(G \pm P) \cdot p}{1 \pm p}$, i $p = \frac{(1 \pm p) \cdot P}{G \pm P}$.

Primer 3. Zajedno sa 18% poreza na promet, prodajna cena nekog proizvoda je 453,12 dinara. Izračunati nabavnu cenu i iznos poreza na promet.

Rešenje. Ako sa *G* obeležimo nabavnu cenu, a sa *P* iznos poreza na promet po stopi $p = 0{,}18$, tada je $G + P = 453{,}12$.

Nabavnu cenu *G* izračunavamo po obrascu $G = \frac{G + P}{1 + p} = \frac{453{,}12}{1{,}18} = 384$.

Iznos poreza na promet dobijamo po obrascu $P = \frac{(G + P) \cdot p}{1 + p} = \frac{453{,}12 \cdot 0{,}18}{1{,}18} = 69{,}12$.

P smo mogli da izračunamo i iz $G = (G + P) - G = 453{,}12 - 384 = 69{,}12$.

Primer 4. Posle pojeftinjenja za 12‰, cena neke robe je 3102,32 dinara. Izračunati kolika bi bila cena da je roba poskupela za 12‰.

Rešenje. $G - P = 3102{,}32$ i $p = 0{,}012$, pa se cena robe pre pojeftinjenja izračunava po obrascu $G = \frac{G - P}{1 - p} = \frac{3102{,}32}{0{,}988} = 3140$. Da je umesto pojeftinjenja, roba poskupela za

p_1 = 12‰, poskupljenje izračunavamo po obrascu $P_1 = G \cdot p_1 = 3140 \cdot 0{,}012 = 37{,}68$, pa bi povećana cena robe bila $G + P_1 = 3140 + 37{,}68 = 3177{,}68$.

Primer 5. Posle poskupljenja po stopi od 15,6%, cena neke robe je 718 dinara. Izračunaj njenu cenu: a) posle poskupljenja od 26,3%; b) posle pojeftinjenja od 18,2%.

Rešenje. a) $p_1 = 0{,}156$, $G+P_1 = 718$, $p_2 = 0{,}263$, pa možemo postaviti proporciju

$718:(G+P_2)=1{,}156:1{,}263 \Rightarrow G+P_2 = 784{,}46$ dinara;

b) $p_1 = 0{,}156$, $G+P_1 = 718$, $p_2 = 0{,}182$

$718:(G-P_2)=1{,}156:(1-0{,}182) \Rightarrow G-P_2 = 508{,}07$ dinara.

10.2. Modeli kamatnog računa

K – kapital (ili glavnica) - ukupna suma koju poverilac daje dužniku (odnosno štediša ulaže na štednju).

p – kamatna stopa – predstavlja iznos koji dužnik godišnje plaća poveriocu na svakih 100 pozajmlnjenih jedinica. Izračunava se u procentima (p%) ili u decimalnom zapisu $p = \dfrac{p\%}{100}$.

I – interes (ili kamata) – predstavlja ukupnu sumu novca koju dužnik isplaćuje poveriocu za ceo pozajmljeni kapital K u vemenu t, obačunata po kamatnoj stopi p.

t – vreme – računa se od dana pozajmljivanja do dana vraćanja kapitala i može se računati u godinama (t_g), mesecima (t_m) ili danima (t_d).

Vrednost početnog kapitala, na početku vremenskog perioda neke finansijske transakcije (u trenutku $t=t_0$) nazivamo početnom vrednošću kapitala (ili sadašnjom vrednošću) i obično obeležavamo sa K_0. Vrednost kapitala na kraju finansijske transakcije (u trenutku $t>t_0$) nazivamo krajnjom vrednošću kapitala i obeležavamo sa $K=f(t)$. $I= K - K_0$ (kamata).

Vrednost kapitala se tokom vremena "oplođuje" tj. raste i tu promenu nazivamo kapitalizacijom (***kapitalisanjem***) ili ukamaćivanjem.

Kod kamatnog računa kad je vreme t izraženo u danima postoje sledeće vraijante:

- Svi meseci se računaju po 30 dana a godina se računa sa 360 dana što se obeležava sa (30, 360).
- Broj dana u mesecu se računa kalendarski (realno), a godina sa 360 dana i obeležava se sa (k, 360).
- Broj dana u mesecu se računa kalendarski (realno), a godina sa 365 dana i obeležava se sa (k, 365).

U praksi se primenjuju prost i složen kamatni račun.

Prost kamatni račun imamo u slučajevima kad se kamata računa na istu osnovicu (početni kapital) za celo vreme trajanja kapitalisanja, pri čemu je kamata proporcionalna sa veličinom kapitala K, kamatnom stopom p i vremenom kapitalisanja t. Prost kamatni račun se po pravilu koristi kod kratkoročnih finansijskih transakcija čije je vreme trajanja ispod godinu dana.

Kod **složenog kamatnog računa**, kamata iz jednog obračunskog perioda pripisuje se glavnici, pa se u sledećem obračunskom periodu kamata računa na tako uvećanu glavnicu iz

prethodnog perioda. Obračunski periodi mogu biti godišnji, polugodišnji, tromesečni (kvartalni), mesečni ili na neki drugi način utvrđeni.
Kod složenog kapitalisanja možemo koristiti **dekurzivni** ili **anticipativni** način računanja kamate.
Kod dekurzivnog načina računanja kamate, kamata se izračunava u odnosu na početnu vrednost kapitala za taj obračunski period, a kamatna stopa se obeležava sa p. Kod anticipativnog načina računanja, kamata se izračunava u odnosu na krajnju vrednost kapitala za posmatrani vremenski period, a kamatna stopa se obeležava sa q.

10.2.1. Prost kamatni račun (od sto) sa dekurzivnom kamatnom stopom

Kod prostog kamatnog računa kamata se obračunava jednom, na kraju celog vremenskog perioda u odnosu na osnovicu K_0, pa je veličina kamate I, direktno proporcionalna sa glavnicom K_0, kamatnom stopom p i vremenom t.
Kako se kamatna stopa obično zadaje na godišnjem nivou, vreme t mora biti izraženo u godinama. Ako je kapital K_0 uložen (plasiran) po stopi p na vreme t godina tada kapitalu K_0 odgovara procenat od 100%, kamati I odgovara procenat od $t{\cdot}p$ % pa imamo osnovnu proporciju $K_0 : I = 100 : pt$ odnosno

$$K_0 : 100 = I : p{\cdot}t \qquad (1)$$

gde je p – kamatna stopa data u procentima.
Iz formule (1) na osnovu tri poznate veličine izračunavamo četvrtu nepoznatu veličinu:

$$I = \frac{K_0 p \cdot t}{100}, \quad K_0 = \frac{100I}{p \cdot t}, \quad p = \frac{100I}{K_0 \cdot t}, \quad t = \frac{100I}{K_0 \cdot p} \qquad (2)$$

Ako stopu p pišemo u decimalnom zapisu ($p\%/100$) tada formula (1) ima oblik

$$K_0 : 1 = I : p{\cdot}t \qquad (3)$$

Odakle je $I = K_0 \cdot p \cdot t$, $K_0 = \dfrac{I}{p \cdot t}$, $p = \dfrac{I}{K_0 \cdot t}$, $t = \dfrac{I}{K_0 \cdot p}$ (4)

Ako je vreme zadato u mesecima t_m onda t (vreme u godinama) izračunavamo po formuli

$t = \dfrac{t_m}{12}$, ako je vreme dato u danima onda je $t = \dfrac{t_d}{360}$ ili $t = \dfrac{t_d}{365}$.

Primer 1. Koliku kamatu donosi kapital od 385 000 dinara uložen na vreme od 2 godine 3 meseca i 15 dana po stopi od 12% godišnje uz (30, 365)? Kolika je krajnja vrednost kapitala?
Rešenje. $K_0 = 385\,000$, $p = 0{,}12$, $t_d = 2{\cdot}365 + 3{\cdot}30 + 15 = 835$ dana, pa je prema (4) kamata

$I = K_0 \cdot p \cdot \dfrac{t_d}{365} = 385000 \cdot 0{,}12 \cdot \dfrac{835}{365} = 105690{,}411$ dinara, a krajnja vrednost kapitala je

$K = K_0 + I = 385000 + 105690{,}411 = 490690{,}411$ dinara.

Primer 2. Po kojoj stopi je uložen kapital od 630000 dinara na vreme od 3 godine i 5 meseci, ako je narastao na 917 000 dinara.

Rešenje. $K_0 = 630\,000$, $K = 917\,000$, $t_m = 3 \cdot 12 + 5 = 41$ mesec.

Kako je $I = K - K_0 = 917\,000 - 630\,000 = 287\,000 \Rightarrow$

$$p = \frac{I}{K_0 \cdot \frac{t_m}{12}} = \frac{287000 \cdot 12}{630000 \cdot 41} = 0{,}1333 \Rightarrow p = 13{,}33\%$$

Primer 3. Koju sumu novca treba uložiti 23.04.2008. godine, po stopi 12,6% da bi se 11.03.2009. godine podigla suma od 134 156 dinara uz (k, 365)?

Rešenje. $K_0 = ?$, $K = 134\,156$, $t = 7 + 6 \cdot 31 + 3 \cdot 30 + 28 + 11 = 322$ dana (kad se koristi varijanta (k, 365) mora se računati realno broj dana u mesecu), $p = 0{,}126$.

K_0 računamo iz formule $K_0 = \dfrac{I}{p \cdot t}$, no kako nam kamata I nije poznata, izrazićemo je kao $I = K - K_0 = 134\,156 - K_0$, pa je

$$K_0 = \frac{134156 - K_0}{p \cdot \frac{t_d}{365}} \Rightarrow K_0 \cdot p \cdot \frac{t_d}{365} = 134156 - K_0 \Rightarrow K_0\left(1 + p \cdot \frac{t_d}{365}\right) = 134156 \Rightarrow$$

$$K_0 = \frac{134156}{1 + p \cdot \frac{t_d}{365}} = \frac{134156}{1 + 0{,}126 \cdot \frac{322}{365}} \approx 120735{,}5$$

Primer 4. Kapital od 700 eura je uložen na štednju 23.07.2008. godine po stopi od 5,4% godišnje. Kog dana se može podići iznos od 1000 eura na ime glavnice uvećane sa kamatom uz (k, 365).

Rešenje. $K_0 = 700$, $K = 1000$, $p = 0{,}054$, $t = ?$ (vreme je u godinama)

$I = K - K_0 = 1000 - 700 = 300 \Rightarrow t = \dfrac{I}{K_0 \cdot p} = \dfrac{300}{700 \cdot 0{,}054} \approx 7{,}9365$ godina.

$\Rightarrow t =$ 7god.$0{,}9365 \cdot 365$dana $\approx$ 7god. 342 dana.

10.2.2. Složen kamatni račun sa dekurzivnim načinom kapitalisanja

Početna i krajnja vrednost kapitala

Pretpostavimo da je kapital K_0 (početna vrednost kapiatala) uložen po godišnjoj dekurzivnoj stopi p na vreme od t godina sa m kapitalisanja (obračunskih perioda) u toku jedne godine.

Tada je kamatna stopa po jednom obračunskom periodu jednaka $\dfrac{p}{m}$ i ova stopa predstavlja tzv. **relativnu kamatnu stopu**.

Na kraju prvog obračunskog perioda nakon dodavanja kamate $I_1 = K_0 \frac{p}{m}$ glavnici K_0 dobijamo da je krajnja vrednost kapitala:

$$K_1 = K_0 + I_1 = K_0 + K_0 \frac{p}{m} = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right).$$

Na kraju drugog obračunskog perioda, kamata I_2 se izračunava na glavnicu K_1 iz tog obračunskog perioda $I_2 = K_1 \frac{p}{m}$ i dodaje se glavnici K_1, pa je krajnja vrednost kapitala:

$K_2 = K_1 + I_2 = K_1 + K_1 \frac{p}{m} = K_1\left(1+\frac{p}{m}\right)$, pa kako je $K_1 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)$, to je

$$K_2 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)\left(1+\frac{p}{m}\right) \Rightarrow K_2 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^2.$$

Na kraju trećeg obračunskog perioda kamata $I_3 = K_2 \frac{p}{m}$ se dodaje glavnici K_2 pa je krajnja vrednost kapitala:

$K_3 = K_2 + I_3 = K_2 + K_2 \frac{p}{m} = K_2\left(1+\frac{p}{m}\right)$, pa kako je $K_2 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^2$ to je

$$K_3 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^2\left(1+\frac{p}{m}\right) \Rightarrow K_3 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^3.$$

Na osnovu ovih izračunavanja možemo izvući zaključak da je na kraju *i*-tog obračunskog perioda, krajnja vrednost kapitala:

$K_i = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^i$, gde je $i = 1, 2, 3, \ldots, tm$ (tm broj godina puta broj obračunskih perioda u godini). Dakle nakon isteka vremena trajanja ukamaćivanja t, $i = tm$ pa je **krajnja vrednost kapitala**:

$K_{tm} = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}$. Ako obeležimo sa $r = 1+\frac{p}{m}$, tada je $K_{tm} = K_0 \cdot r^{tm}$.

Vreme t ne mora da predstavlja ceo broj godina, ali mora da sadrži ceo broj obračunskih perioda, tj tm mora da bude ceo broj. Kamata kod ovakvog načina kapitalisanja je $I = K_{tm} - K_0$.

Ako su poznate veličine K_{tm}, t, m i p, tada **početnu vrednost kapitala** $\boldsymbol{K_0}$ dobijamo iz formile

$K_0 = \frac{K_{tm}}{r^{tm}} = \frac{K_{tm}}{\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}}$. Ova vrednost predstavlja takozvanu **diskontovanu vrednost** kapitala K_{tm}.

Ako su poznate veličine K_0, K_{tm}, m i p, tada **nepoznato vreme ukamaćivanja** $\boldsymbol{t}$ dobijamo na sledeći način:

$$K_{tm}=K_0\cdot r^{tm}\Rightarrow r^{tm}=\frac{K_{tm}}{K_0}\Rightarrow \log r^{tm}=\log\frac{K_{tm}}{K_0}\Rightarrow tm\log r=\log\frac{K_{tm}}{K_0}\Rightarrow t=\frac{\log\frac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r}.$$

Na sličan način kad su poznati K_0, K_{tm}, m i t, **nepoznatu kamatnu stopu *p*** dobijamo iz

$$K_{tm}=K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm},\ \left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}=\frac{K_{tm}}{K_0}\Rightarrow 1+\frac{p}{m}=\sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}}\Rightarrow p=m\left(\sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}}-1\right).$$

Primer 1. Izračunati koliku kamatu donosi kapital od 281300 dinara koji je uložen na štednju 3 godine i 9 meseci sa tromesečnim (kvartalnim) kapitalisanjem po godišnjoj dekurzivnoj stopi od 11,6%.

Rešenje. K_0 = 281300, t = 3 god. 9 mes., $m=\frac{12}{3}=4$ obračunskih perioda godišnje,

p = 0,116 $\Rightarrow$ $tm=3\cdot 4+\frac{9}{3}=15$ obračunskih perioda ukupno.

$$I=K_m-K_0=K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}-K_0=281300\left(1+\frac{0{,}116}{4}\right)^{15}-281300=150617{,}055 \text{ dinara.}$$

Primer 2. Koju sumu treba uložiti pa da ona za vreme od 3 godine po stopi od 9% godišnje sa mesečnim ukamaćivanjem donese 386300 dinara kamate.

Rešenje. I = 386300, p = 0,09, t = 3, m = 12, $\Rightarrow$ tm = 3 · 12 = 36, K_0 = ?

Iz $I=K_{tm}-K_0=K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}-K_0=K_0\left(\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}-1\right)\Rightarrow K_0=\dfrac{I}{\left(\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}-1\right)}$

Pa je početni kapital $K_0=\dfrac{386300}{\left(\left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^{36}-1\right)}=1251598{,}23$

a krajnja vrednost kapitala je $K_{tm}=K_{36}=K_0+I=1251598{,}23+386300=1637898{,}23$.

Primer 3. Odredi na koje vreme je uložena suma od 360000 dinara po godišnjoj stopi od 12% uz tromesečno kapitalisanje ako je ona narasla na 612876 dinara.

Rešenje. K_0 = 360000, p = 0,12, $m=\frac{12}{3}=4$, K_{t4} = 612876, t = ?

$$t=\frac{\log\frac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r}=\frac{\log\frac{612876}{360000}}{4\cdot\log 1{,}03}=\frac{0{,}23107}{4\cdot 0{,}01284}=4{,}5 \text{ godina},\ tm=4{,}5\cdot 4=18.$$

Primer 4. Po kojoj stopi je uložen kapital od 94600 dinara na vreme od 3 godine i 6 meseci uz mesčno ukamaćivanje, akoje on doneo 57633 dinara kamate?

Rešenje. $K_0 = 94600$, $t = 3$ god. 6 mes. $m = 12$, $tm = 3 \cdot 12 + 6 = 42$, $I = 57633$, $K_{tm} = K_0 + I =$ $= 94600 + 57633 = 152233$.

$$K_{tm} = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm},\ \left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} = \frac{K_{tm}}{K_0} \Rightarrow 1+\frac{p}{m} = \sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}} \Rightarrow p = m\left(\sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}} - 1\right)$$

$$p = 12\left(\sqrt[42]{\frac{152233}{94600}} - 1\right) = 12\left(1{,}6077^{\frac{1}{42}} - 1\right) = 12(1{,}6077^{0{,}0238} - 1) = 0{,}13637 = 13{,}6\%.$$

Preračunavanje kamatne stope sa jedne na drugu vrstu kapitalisanja

Razmatramo koji odnos između kamatnih stopa p_1 i p_2 mora da postoji da bi kapital K_0 uložen po stopi p_1 sa m_1 obračunskoh perioda godišnje, na kraju svake godine davao istu krajnju vrednost, tj donosio istu kamatu kao da je uložen po stopi p_2 sa m_2 kapitalisanja u toku godine. Iz uslova

$$K_{tm_1} = K_{tm_2} \Rightarrow K_0\left(1+\frac{p_1}{m_1}\right)^{tm_1} = K_0\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{tm_2} \Rightarrow 1+\frac{p_1}{m_1} = \sqrt[tm_1]{\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{tm_2}} \Rightarrow$$

$$p_1 = m_1\left(\sqrt[m_1]{\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{m_2}} - 1\right) \text{ ili } p_1 = m_1\left(\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{m_1}} - 1\right)$$

Primer 5. Odredi kamatnu stopu koja će sa mesečnim kapitalisanjem donositi krajem svake godine kapitalu K_0 istu krajnju vrednost, kao da je uložen po stopi od 12,6% sa tromesečnim kapitalisanjem.

Rešenje. $p_1 = ?$, $m_1 = 12$, $p_2 = 0{,}126$, $m_2 = 12/3 = 4$

$$p_1 = m_1\left(\sqrt[m_1]{\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{m_2}} - 1\right) = 12\left(\left(1+\frac{0{,}126}{4}\right)^{\frac{4}{12}} - 1\right) = 12\left(1{,}0315^{\frac{1}{3}} - 1\right) = 12\left(\sqrt[3]{1{,}0315} - 1\right) =$$

$= 0{,}12469 = 12{,}47\%$

Primer 6. Ako je godišnja stopa za oročenu štednju na jednu godinu 12%, izračunati odgovarajuće godišnje stope za a) mesečno, b) tromesečno kapitalisanje, tako da krajnja vrednost kapitala na kraju godine bude ista.

Rešenje. a) $p_2 = 0{,}12$, $m_2 = 1$, $m_1 = 12$, $p_1 = ?$

$$p_1 = 12 \cdot \left((1+0{,}12)^{\frac{1}{12}} - 1\right) = 0{,}11386 = 11{,}386\%.$$

b) $p_2 = 0{,}12$, $m_2 = 1$, $m_1 = 4$, $p_1 = ?$

$$p_1 = 4\left((1+0{,}12)^{\frac{1}{4}} - 1\right) = 0{,}11495 = 11{,}495\%$$

Konformna kamatna stopa i odnos između relativne i komforne kamatne stope

Konformna kamatna stopa $p_{k,m}$ predstavlja stopu obračuna kamate po svakom od m obračunskih perioda u toku godine sa osobinom da je krajnja vrednost kapitala na kraju godine bez obzira na broj kapitalisanja, ista kao da je kapital jednom kapitalisan na kraju godine po godišnjoj kamatnoj stopi p.

Ako se koristi konformna kamatna stopa $p_{k,m}$ onda se u formuli za izračunavanje krajnje vrednosti kapitala relativna kamatna stopa $\frac{p}{m}$ zamenjuje konformnom kamatnom stopom $p_{k,m}$ pa je krajnja vrednost kapitala

$K_{tm} = K_0(1+p_{k,m})^{tm} = K_0(1+p)^t$ odatle dobijamo $(1+p_{k,m})^m = 1+p$. Ova formula daje odnos između komforne $p_{k,m}$ i godišnje kamatne stope p. Rešavanjem ove jednačine po $p_{k,m}$ dobijamo $p_{k,m} = (1+p)^{\frac{1}{m}} - 1$, a rešavanjem po p dobijamo $p = (1+p_{k,m})^m - 1$. Da bismo uočili razliku između relativne i komforne kamatne stope razmotrićemo nekoliko primera.

Primer 1. Neka je godišnja stopa p = 8% i m = 12. Tada je relativna kamatna stopa $\frac{p}{m} = \frac{0,08}{12} = 0,00667$, a konformna kamatna stopa je

$p_{k,12} = (1+p)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1,08^{0,0833} - 1 = 0,00643$. Ako se mesečnim ukamaćivanjem odrede odgovarajuće godišnje stope, relativnoj stopi odgovara

$p' = \left(1+\frac{p}{m}\right)^m - 1 = (1+0,00667)^{12} - 1 = 0,083\% = 8,3\%$, a komfornoj mesečnoj kamatnoj stopi odgovara godišnja stopa 8% . Razlika je 0,3% ukoliko se koristi relativna kamatna stopa i ekonomski nije opravdana.

Primer 2. Neka je godišnja kamatna stopa p= 15% i neka je m = 12. Relativna kamatna stopa će biti $\frac{p}{m} = \frac{0,15}{12} = 0,0125$, i ona mesečnim ukamaćivanjem daje godišnju stopu

$p' = (1+0,0125)^{12} - 1 = 0,16075 = 16,075\%$ koja je bez nekog opravdanja veća za 1,075% od realne godišnje stope 15%. Konformna kamatna stopa $p_{k,12} = (1+0,15)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,01171$, daje mesečnim ukamaćivanjem $p' = p$ = 15%.

Sa povećanjem kamatne stope p ove razlike su sve veće, tako da ako je kamata već od 15%, onda se obavezno umesto relativne mora koristiti komforna kamatna stopa.

10.2.3. Model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja

U praksi se može desiti da se vreme ukamaćivanja ne poklapa sa celim brojem obračunskih perioda, pa se do krajnje vrednosti kapitala tada ne može doći samo primenom složenog kamatnog računa, već se mora kombinovati složen i prost kamatni račun.

Neka je kapital K_0 uložen po stopi p sa m obračuna godišnje za vreme t', gde $t'm$ nije ceo broj obračunskih perioda. Onda ćemo sa tm obeležiti ceo broj obračunskih perioda, a preostali broj dana sa t_d ($t_d < m$). Tada se najpre izračunava vrednost kapitala za celi broj perioda tm,

$K_{tm} = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}$, a za preostalo vreme od t_d dana računa se prosta kamata na osnovicu K_{tm}, tako da je **krajnja vrednost kapitala**

$$K_s = K_{tm} + K_{tm}\frac{p\cdot t_d}{365} = K_{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right). \qquad (6)$$

Izračunavanje vremena kod kombinovanog kapitalisanja

Ako su poznate veličine: početna vrednost kapitala, krajnja vrednost kapitala K_s, kamatna stopa p i broj obračunskih perioda u toku godine m, najpre se izračunava vreme t' po formuli koja se primenjuje kod složenog kamatnog računa $t' = \dfrac{\log\dfrac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r}$. Ukoliko t' ne sadrži ceo broj obračunskih perioda, to znači da se radi o kombinovanom kapitalisanju. tm se izračunava iz t', tako da tm bude ceo broj, a preostali broj dana t_d se izračunava iz jednačine (6)

$$1+\frac{p\cdot t_d}{365} = \frac{K_s}{K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}} \Rightarrow \frac{p\cdot t_d}{365} = \frac{K_s}{K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}} - 1 \Rightarrow t_d = \frac{365}{p}\left(\frac{K_s}{K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}} - 1\right)$$

Traženo vreme je $t = t' + t_d$.

Primer 1. Izračunati kamatu koju donosi kapital od 25000 dinara uložen na vreme od 3godine i 246 dana uz tromesečno ukamaćivanje po stopi od 12,5% godišnje.

Rešenje. $K_0 = 25000$, $p = 0{,}125$, $t' =$ 3god 246dana, $m = 12/3 = 4$, $246 = 8\cdot 30 + 6$, $\Rightarrow tm = 3\cdot 4 + 2 = 14$, jer 246 dana sdraži 8 meseci odnosno dva obračunska perioda. Preostali broj dana je $t_d = 2\cdot 30 + 6 = 66$ dana, pa je krajnja vrednost kapitala

$$K_s = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) = 25000\left(1+\frac{0{,}125}{4}\right)^{14}\left(1+\frac{0{,}125\cdot 66}{365}\right) =$$

$$= 38462{,}32\cdot 1{,}0226 = 39331{,}568$$

Tražena kamata je $I = K_s - K_0 = 39331{,}568 - 25000 = 14331{,}568$ dinara.

Primer 2. Kolika je vrednost kapitala bila na dan 23.11.2004. godine ako je kapital uložen sa mesečnim ukamaćivanjem po stopi od 9,36% narastao na 79180 dinara na dan 12.06.2007. godine.

Rešenje. Vreme ukamaćivanja je $t' = 2$ god. 6 mes. 20 dana što ukazuje da se radi o kombinovanom složenom i prostom ukamaćivanju. $p = 0{,}0936$, $K_s = 79180$, $K_0 = ?$

Pošto se radi o mesečnom ukamaćivanju, $m = 12$, pa je $tm = 2\cdot 12 + 6 = 30$, a $t_d = 20$.

Iz $K_s = K_0\left(1+\dfrac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\dfrac{p\cdot t_d}{365}\right) \Rightarrow K_0 = \dfrac{K_s}{\left(1+\dfrac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\dfrac{p\cdot t_d}{365}\right)}$

Pa je početna vrednost kapitala

$$K_0 = \frac{79180}{\left(1+\dfrac{0{,}0936}{12}\right)^{30}\left(1+\dfrac{0{,}0936\cdot 20}{365}\right)} = \frac{79180}{1{,}2625\cdot 1.0051} = 62398{,}6 \text{ dinara.}$$

Primer 3. Na koje je vreme uložen kapital od 62000 dinara uz mesčno ukamaćivanje po stopi od 9,36% godišnje ako je on doneo 16780 dinara kamate?

Rešenje. $K_0 = 62000$, $p = 0,\ 0936$, $I = 16780$ $m = 12$ i uz pretpostavku da se ovde radi o kombinovanom kapitalisanju, $K_{tm} = K_s = K_0 + I = 62000 + 16780 = 78780$, pa najpre računamo vreme po formuli za složeno kapitalisanje

$$t' = \frac{\log\dfrac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r} = \frac{\log\dfrac{78780}{62000}}{12\cdot\log\left(1+\dfrac{0{,}0936}{12}\right)} = \frac{0{,}104}{0{,}0405} = 2{,}5679\,,\ 0{,}5679\cdot 365 \approx 207, \text{ pa je}$$

$t' = 2$god. 207dana, $tm = 2\cdot 12 + 6 = 30$. Sada računamo t_d po formuli za prosto ukamaćivanje

$$t_d = \frac{365}{p}\left(\frac{K_s}{K_0\left(1+\dfrac{p}{m}\right)^{tm}} - 1\right) = \frac{365}{0{,}0936}\left(\frac{78780}{62000\left(1+\dfrac{0{,}0936}{12}\right)^{30}} - 1\right) =$$

$$= 3899{,}573\left(\frac{78780}{78274{,}862} - 1\right) = 25{,}165 \approx 25\text{dana},$$

pa je traženo vreme $t = t + t_d = 2$god.6mes.25dana.

Primer 4. Izračunati kamatu koju donosi kapital od 168000 dinara za vreme od tri godine i 136 dana uložen po mesečnoj konformnoj kamatnoj stopi koja odgovara godišnjoj kamatnoj stopi od 16%. Kolika bi bila razlika u kamatama da je umesto komforne korišćena relativna kamatna stopa?

Rešenje. $K_0 = 168000$, $t' = 3$god. 136 dana, $m = 12$, $p = 0{,}16$

$136 = 4 \cdot 30 + 16 \Rightarrow tm = 3 \cdot 12 + 4 = 40,\ t_d = 16$

U pitanju je model kombinovanog prostog i složenog ukamaćivanja. Ako koristimo ralativnu kamatnu stopu $\frac{p}{m} = \frac{0,16}{12} = 0,0133 = 1,33\%$, krajnja vrednost kapitala će biti

$$K_s = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right), \text{a kamata je } I = K_s - K_0 = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) - K_0 =$$

$$= K_0\left(\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right)-1\right) = 168000\left((1+0,0133)^{40}\left(1+\frac{0,16\cdot 16}{365}\right)-1\right) = 118989,74$$

Ako umesto relativne koristimo komformnu kamatnu stopu

$p_{k,m} = p_{k,12} = (1+p)^{12} - 1 = (1+0,16)^{12} - 1 = 0,01244$, kamata je u ovom slučaju

$$I' = K_s' - K_0 = K_0\left(1+p_{k,m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) - K_0 = K_0\left(\left(1+p_{k,m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right)-1\right) =$$

$$168000\left((1+0,01244)^{40}\left(1+\frac{0,16\cdot 16}{365}\right)-1\right) = 109406,39$$

Razlika kamata je $I - I' = 118989,74 - 109406,39 = 9583,35$ koju korisnik kapitala neopravdano plaća vlasniku kapitala.

Primer 5. Na koje vreme treba uložiti kapital od 27860 dinara uz četvoromesečno ukamaćivanje po komfornoj kamatnoj stopi koja je ekvivalentna mesečnoj kamatnoj stopi od 1,018% pa da ovaj kapital donese istu kamatu kao i kapital od 76320 dinara uložen na vreme od 3 godine uz šestomesečno ukamćivanje po godišnjoj kamatnoj stopi jednakoj odgovarajućoj kamatnoj stopi po kojoj je uložen prvi kapital.

Na osnovu konformne kamatne stope $p_{k,12} = 0,01018$, određujemo godišnju kamatnu stopu $p = (1+p_{k,m})^m - 1 = (1+0,01018)^{12} - 1 = 0,12924$. Odgovarajuća konformna kamatna stopa sa četvoromesečnim ukamaćivanjem će biti $p_{k,3} = (1+p)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,04135$.

Za drugi kapital imamo $K_0' = 76320, t_1 = 3, m_1 = \frac{12}{6} = 2, p_1 = p = 0,12924$, pa kako nije naglašeno da se koristi konformna kamatna stopa, koristićemo relativnu kamatnu stopu.

$$K_{t_1m_1} = K_0'\left(1+\frac{p_1}{m_1}\right)^{t_1m_1} = 76320\left(1+\frac{0,12924}{2}\right)^6 = 111123,54 \Rightarrow I_1 = K_{t_1m_1} - K_0' = 34803,54.$$

Kako je interes (kamata) prvog kapitala jednak interesu drugog kapitala, $I = I_1 = 34803,54$, krajnja vrednost kapitala je K_{tm} (ili K_s) $= K_0 + I = 27860 + 34803,54 = 62663,54$.

$p_{k,3} = 0{,}04135$, $m = \dfrac{12}{4} = 3$, $t = ?$

$$t' = \frac{\log\dfrac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r} = \frac{\log\dfrac{62663{,}54}{27860}}{3\cdot\log(1+p_{k,3})} = \frac{0{,}3520}{3\cdot\log(1+0{,}04135)} = \frac{0{,}3518}{0{,}0528} = 6{,}66854 \text{ godina}$$

$0{,}66854\cdot 365 \approx 244$ dana = 8 mes. 4 dana, što nam govori da je u pitanju kombinovano kapitalisanje, pa je broj obračunskih perioda $tm = 6\cdot 3 + 2 = 20$, a t_d izračunavamo iz formule

$$K_s = K_0\left(1+p_{k,3}\right)^{20}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) \Rightarrow t_d = \frac{365}{p}\left(\frac{K_s}{K_0\left(1+p_{k,3}\right)^{20}} - 1\right) =$$

$$= \frac{365}{0{,}12924}\left(\frac{62663{,}54}{27860(1+0{,}04135)^{20}} - 1\right) = 0{,}65 \approx 1\,\text{dan}$$, pa je traženo vreme $t = 6\text{god }241\text{dan}$.

10.2.4. Složen kamatni račun sa anticipativnim načinom kapitalisanja

Za razliku od dekurzivnog načina gde se kamata obračunava na osnovicu koja predstavlja početnu vrednost kapitala za posmatrani obračunski period, kod anticipativnog načina, kamata se obračunava na osnovicu koja predstavlja krajnju vrednost kapitala. Zbog toga su pri istoj stopi anticipativne kamate veće i time nepovoljnije za korisnika od dekurzivnih. Da bi razlikovali ova dva načina kapitalisanja, anticipativnu kamatnu stopu ćemo obeležavati sa q i koristiti je u decimalnom zapisu.

Početna i karajnja vrednost kapitala

Neka je kapital K_0 uložen sa anticipativnom kamatnom stopom q i m kapitalisanja u toku godine, na vreme t godina, pri čemu t sadrži ceo broj obračunskih perioda. Kamatna stopa po jednom obračunskom periodu (**relativna anticipativna kamatna stopa**) je $\dfrac{q}{m}$. Obeležimo sa K_1 krajnju vrednost kapitala na kraju prvog obračunskog perioda. Onda se početna vrednost kapitala za taj period dobija oduzimanjem kamate $K_1\dfrac{q}{m}$ od krajnje vrednosti kapitala za prvi obračunski period, tj važi

$$K_0 = K_1 - K_1\frac{q}{m} = K_1\left(1-\frac{q}{m}\right) \Rightarrow K_1 = \frac{K_0}{1-\dfrac{q}{m}}.$$

Za vrednost kapitala na kraju drugog obračunskog perioda K_2 važi

$$K_1 = K_2 - K_2\frac{q}{m} = K_2\left(1-\frac{q}{m}\right) \Rightarrow K_2 = \frac{K_1}{1-\dfrac{q}{m}} = \frac{K_0}{\left(1-\dfrac{q}{m}\right)^2}.$$

Na karju i-tog obračunskog perioda, ova formula bi imala sledeći oblik

$$K_i = \frac{K_0}{\left(1-\frac{q}{m}\right)^i},\ i = 1, 2, 3, \ldots, tm .$$

Onda će **krajnja vrednost kapitala** biti $K_{tm} = \frac{K_0}{\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}}$.

Izraz $\frac{1}{1-\frac{q}{m}} = \rho$ predstvlja **anticipativni kamatni činilac**. Krajnja vrednost kapitala izražena

preko njega je $K_{tm} = K_0 \rho^{tm}$. Odavde se može izraziti **početna vrednost kapitala**

$K_0 = K_{tm} \rho^{-tm}$.

Takođe može se izraziti **vreme ukamaćivanja**

$$\rho^{tm} = \frac{K_{tm}}{K_0} \Rightarrow \log \rho^{tm} = \log \frac{K_{tm}}{K_0} \Rightarrow tm \log \rho = \log \frac{K_{tm}}{K_0} \Rightarrow t = \frac{\log \frac{K_{tm}}{K_0}}{m \log \rho}.$$

Iz gornje jednakosti se može izračunati i **kamatna stopa**

$$\rho^{tm} = \frac{K_{tm}}{K_0} \Rightarrow \rho = \sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}} \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{q}{m}} = \sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}} \Rightarrow q = m - \frac{m}{\sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}}}.$$

Veza između anticipativne i dekurzivne kamatne stope

Vezu između anticipativne q i dekurzivne p kamatne stope ćemo odrediti iz uslova da su krajnje vrednosti kapitala koje donosi početni kapital K_0 za vreme t i m kapitalisanja godišnje, jednake.

Iz $K_{tm} = K'_{tm} \Rightarrow K_0 \rho^{tm} = K_0 r^{tm} \Rightarrow \rho = r \Leftrightarrow \frac{1}{1-\frac{q}{m}} = 1 + \frac{p}{m} \Leftrightarrow \frac{m}{m-q} = \frac{m+p}{m}$.

Odavde možemo izraziti anticipativnu kamatnu stopu preku dekurzivne

$q = m - \frac{m^2}{m+p}$, i obrnuto dekurzivnu kamatnu stopu preko anticipativne $p = \frac{m^2}{m-q} - m$.

Premer 1. Koliku kamatu donosi kapital od 72000 dinara sa 13% godišnje anticipativne kamatne stope za vreme od 2 godine i 3 meseca mesečnim kapitalisanjem? Kolika je dekurzivna kamata pri istoj stopi? Koliku dekutzivnu kamatnu stopu treba primeniti da bi se ostvarila ista kamata kao kod zadate anticipativne kamatne stope?

Rešenje. $K_0 = 72000$, $q = 0{,}13$, $t = 2$god.3mes., $m = 12$, $tm = 2 \cdot 12 + 3 = 27$

Anticipativna kamata je

$$I = K_{tm} - K_0 = \frac{K_0}{\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}} - K_0 = K_0\left(\frac{1}{\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}} - 1\right) = 72000\left(\frac{1}{\left(1-\frac{0{,}13}{12}\right)^{27}} - 1\right) = 24617{,}71\,.$$

Dekurzivna kamata je

$$I = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} - K_0 = K_0\left(\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} - 1\right) = 72000\left(\left(1+\frac{0{,}13}{12}\right)^{27} - 1\right) = 24312{,}02\,.$$

Da bi se dobila na kraju ista kamata kao kod anticipativnog načina kapitalisanja pri stopi od 13% potrebno je primeniti dekurzivnu kamatnu stopu $p = \frac{m^2}{m-q} - m = \frac{144}{12-0{,}13} - 12 = 13{,}14\%$

Primer 2. Kapital je uložen po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 8,6% godišnje uz mesečno kapitalisanje na vreme 4 godine i 6 meseci. Izračunaj vrednost ovog kapitala ako je on doneo istu kamatu kao i kapital od 491700 dinara uložen na vreme od 2 godine i 6 meseci po anticipativnoj kamatnoj stopi od 10,15% šestomesečnim ukamaćivanjem.

Rešenje. $K_0 = 491700$, $t = 2$god. 6mes., $q = 0{,}1015$, $m = 12/6 = 2$, $tm = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Kamata koju je doneo kapital sa anticipativnim ukamaćivanjem

$$I = K_0\left(\frac{1}{\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}} - 1\right) = 491700\left(\frac{1}{\left(1-\frac{0{,}1015}{2}\right)^{5}} - 1\right) = 12669{,}12\,.$$

Za kapital sa dekurzivnim ukamaćivanjem imamo $p = 0{,}086$, $t_1 = 4$god. 6mes., $m_1 = 12$, $tm = 4 \cdot 12 + 6 = 54$, $I_1 = I$, $K_0 = ?$

Iz $I = K_0\left(\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} - 1\right) \Rightarrow K_0 = \frac{I}{\left(\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm} - 1\right)} = \frac{12669{,}12}{\left(\left(1+\frac{0{,}086}{12}\right)^{54} - 1\right)} = 26925{,}47\,.$

10.3. Krediti

U nedostatku sopstvenih sredstava, subjekat se pozajmljuje kod drugih subjekata koji ta novčana sredstva poseduju. Tako nastaju kreditni odnosi između dužnika i poverioca. Obaveza dužnika je da pozajmljeni novac zajedno sa dogovorenom kamatom vrati poveriocu za određeno vreme kroz određeni broj rata (anuiteta). **Anuiteti** (a) se sastoje iz dva dela: **otplate** (σ) i **kamate** (I) $a = \sigma + I$. Otplatom sadržanom u anuitetu se otplaćuje zajam, a kamatom se otplaćuje kamata na određeni vremenski period (između dva anuiteta), na preostali deo zajma. Anuiteti mogu biti fiksirani (konstantni) za celo vreme otplate kreita, ili mogu biti promenljivi (da opadaju ili rastu) što zavisi od ugovorenog načina otpale kredita. Način otplate kredita se naziva amortizacija.
Pretpostavićemo da je vremenski razmak između dva anuiteta konstantan i da se poklapa sa periodom kapitalisanja zajma, pri čemu se anuiteti isplaćuju na kraju obračunskog perioda.

10.3.1. Amortizacija kredita metodom jednakih otplata sa dekurzivnom kamatnom stopom

Izračunavanje anuiteta i kamata sadržanih u anuitetima
Kod ove metode amortizacije kredita, otplata kredita je konstantna u svakom anuitetu, dok su kamate sadržane u anuitetima i sami anuiteti promenljivi. $a_i = \sigma + I_i$.
Pretpostavimo da je dužnik uzeo kredit u iznosu od K novčanih jedinica, sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom p na vreme t godina sa m anuiteta u toku godine (pri čemu t sadrži ceo broj anuiteta). Broj anuiteta je $n = tm$, pa kako je otplata konstantna ona iznosi $\sigma = \frac{K}{n}$. Vremenski razmak između dva anuiteta je $\frac{12mes}{m}$ pa je relativna kamatna stopa $\frac{p}{m}$.
S obzirom da dužnik vraća prvi anuitet tek na kraju prvog obračunskog perioda, kamata sadržana u prvom anuitetu se računa na ukupnu vrednost duga, pa je $I_1 = K\frac{p}{m}$ što znači da je vrednost prvog anuiteta $a_1 = \sigma + I_1 = \frac{K}{n} + \frac{K \cdot p}{m}$, a stanje duga nakon isplaćenog prvog anuiteta je $S_1 = K - \sigma = K - \frac{K}{n} = K\left(1 - \frac{1}{n}\right)$.
Kamata sadržana u drugom anuitetu računa se na stanje duga S_1 posle isplaćenog prvog anuiteta, pa je $I_2 = S_1\frac{p}{m} = K\frac{p}{m}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, odakle je $a_2 = \sigma + I_2 = \frac{K}{n} + \frac{K \cdot p}{m}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, a ostatak duga nakon vraćenog drugog anuiteta je $S_2 = K - 2 \cdot \sigma = K - 2 \cdot \frac{K}{n} = K\left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

Na osnovu svega navedenog lako je zaključiti da je stanje duga posle vraćanja i-tog anuiteta

$S_i = K - i \cdot \sigma = K - i \cdot \dfrac{K}{n} = K\left(1 - \dfrac{i}{n}\right)$, za i = 1, 2, 3, . . . , n.

Kako se kamata I_i sadražana u i-tom anuitetu računa na stanje duga nakon vraćenog i-1 anuiteta, tj na stanje duga S_{i-1}, to je $I_i = S_{i-1} \cdot \dfrac{p}{m} = \dfrac{K \cdot p}{m}\left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right)$ za i = 1, 2, 3, . . . , n.

Vrednost i-tog anuiteta je $a_i = \sigma + I_i = \dfrac{K}{n} + \dfrac{K \cdot p}{m}\left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right)$ za i = 1, 2, 3, . . . , n.

Vraćeni deo duga posle i-tog anuiteta je $Q_i = i \cdot \sigma = \dfrac{i \cdot K}{n}$.

Primer 1. Ako se kredit od 38960 dinara amortizuje metodom jednakih otplata za 2 godine i 3 meseca i mesečnim anuitetima po godišnjoj stopi od 8,6% izračunati kamatu sadržanu u osmom anuitetu, vrednost 15. anuiteta, vraćeni deo duga posle 20. anuiteta i stanje duga posle 12. anuiteta.

Rešenje. K = 38960, t = 2god. 3mes. m = 12, p = 0,086, $n = tm$ = 2·12 + 3 = 27, otpalata je

$$\sigma = \frac{K}{n} = \frac{38960}{27} = 1442{,}963$$

$$I_i = \frac{K \cdot p}{m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \Rightarrow I_8 = \frac{38960 \cdot 0{,}086}{12}\left(1 - \frac{8-1}{27}\right) = 206{,}825$$

$$a_i = \frac{K}{n} + \frac{K \cdot p}{m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \Rightarrow a_{15} = \frac{38960}{27} + \frac{38960 \cdot 0{,}086}{12}\left(1 - \frac{14}{27}\right) =$$

$$= 1442{,}963 + 134{,}436 = 1577{,}399$$

$$Q_i = \frac{i \cdot K}{n} \Rightarrow Q_{20} = \frac{20 \cdot 38960}{27} = 28859{,}259$$

$$S_i = K - i \cdot \sigma \Rightarrow S_{12} = 38960 - 12 \cdot 1442{,}963 = 21644{,}444.$$

Izračunavanje ukupne kamate i zbira kamata sadržanih u anuitetima počev od *j*-tog do *k*-tog

Ukupna kamata koju dužnik vraća u toku amortizacije kredita jednaka je zbiru kamata sadržanih u svim anuitetima, pa je $I = \sum\limits_{i=1}^{n} I_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{K \cdot p}{m}\left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right) = \dfrac{K \cdot p}{m} \sum\limits_{i=1}^{n}\left(1 - \dfrac{i-1}{n}\right)$

$$I = \frac{K \cdot p}{m}\left(1 - \frac{0}{n} + 1 - \frac{1}{n} + 1 - \frac{2}{n} + \ldots + 1 - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{K \cdot p}{m}\left(n \cdot 1 - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{K \cdot p}{m}\left(n - \frac{1}{n}(1 + 2 + \ldots + (n-1))\right)$$

1+2+ . . . + n-1 predstavlja zbir n-1 članova aritmetičkog niza čiji je prvi član a_1=1, d = 1 i poslednji član a_{n-1} = n-1. ovaj zbir izračunavamo po formuli $S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right)$, odakle dobijamo da je $1 + 2 + \ldots + n - 1 = \frac{n-1}{2}(1 + (n-1)) = \frac{n(n-1)}{2}$, pa je

$$I = \frac{K \cdot p}{m}\left(n - \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n-1)}{2}\right) = \frac{K \cdot p(n+1)}{2m}.$$

Zbir kamata sadržanih u prvih k anuiteta je

$$\sum_{i=1}^{k} I_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{K \cdot p}{m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) = \frac{K \cdot p}{mn}\sum_{i=1}^{k}(n - (i-1)) = \frac{K \cdot p}{mn}(n - 0 + n - 1 + n - 2 + \ldots + n - (k-1)) =$$

$$= \frac{K \cdot p}{mn}\left(kn - (1 + 2 + \ldots + (k-1)\right) = \frac{K \cdot p}{mn}\left(kn - \frac{k(k-1)}{2}\right) = \frac{K \cdot p \cdot k}{2mn}(2n - k + 1)$$

Zbir kamata sadržanih u anuitetima počev od j-tog do k-tog je

$$\sum_{i=j}^{k} I_i = \sum_{i=1}^{k} I_i - \sum_{i=1}^{j-1} I_i = \frac{K \cdot p \cdot k}{2mn}(2n - k + 1) - \frac{K \cdot p \cdot (j-1)}{2mn}(2n - (j-1) + 1)$$

$$\sum_{i=j}^{k} I_i = \frac{Kp}{2mn}(k(2n - k + 1) - (j-1)(2n - j + 2))$$

Zbir prvih k anuiteta je $\sum_{i=1}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k}(\sigma + I_i) = \sum_{i=1}^{k}\sigma + \sum_{i=1}^{k} I_i = k\frac{K}{n} + \frac{Kpk}{2mn}(2n - k + 1)$.

Zbir anuiteta počev od j-tog do k-tog je

$$\sum_{i=j}^{k} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i - \sum_{i=1}^{j-1} a_i = k\frac{K}{n} + \frac{Kpk}{2mn}(2n - k + 1) - \left((j-1)\frac{K}{n} + \frac{Kp(j-1)}{2mn}(2n - (j-1) + 1)\right)$$

$$\sum_{i=j}^{k} a_i = (k - j + 1) \cdot \frac{K}{n} + \frac{Kp}{2mn}(k(2n - k + 1) - (j-1)(2n - j + 2)).$$

Primer 2. Izračunati ukupnu kamatu koja se dobija amortizacijom kredita metodom jednakih otplata i tromesečnim anuitetima po stopi od 12,5% za vreme od 5 godina ako je:

a) kamata sadržana u 12. anuitetu 132 dinara
b) zbir kamata sadržanih u anuitetima počev od 6-tog do 18-tog jednaka 1785 dinara.

Rešenje. m = 12/3 = 4, p = 0,125, t = 5god., n = tm = 5·4 = 20, I = ?

a) kako je $I = \frac{K \cdot p(n+1)}{2m}$, nepoznato K ćemo odrediti iz I_{12} = 132. $I_i = \frac{K \cdot p}{m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right)$

$$K = \frac{I_i \cdot m \cdot n}{p(n - i + 1)} = \frac{132 \cdot 4 \cdot 20}{0{,}125 \cdot (20 - 12 + 1)} = 9386{,}667$$

$$I = \frac{9386{,}667 \cdot 0{,}125 \cdot (20 + 1)}{2 \cdot 4} = 3080$$

b) $\sum_{i=j}^{k} I_i = \frac{Kp}{2mn}(k(2n-k+1)-(j-1)(2n-j+2))$

$$\frac{K\cdot 0{,}125}{2\cdot 4\cdot 20}(18\cdot(2\cdot 20-18+1)-(6-1)(2\cdot 20-6+2)) = 1785 \Rightarrow K = 9764{,}10$$

$$I = \frac{9764{,}10\cdot 0{,}125\cdot 21}{8} = 3203{,}85$$

Analiza amortizacije kredita metodom jednakih otplata i amortizacioni plan

Polazeći od obrasca za kamatu $I_i = \frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)$, uporedimo uzastopne članove I_i i I_{I+1} niza $I_1, I_2, \ldots, I_i, \ldots, I_n$.

Kako je $I_{i+1} - I_i = \frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i+1-1}{n}\right) - \frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right) = -\frac{K\cdot p}{mn} < 0 \Rightarrow I_{i+1} < I_i$ što znači da se kamata iz anuiteta u anuitet smanjuje, tj niz $I_1, I_2, \ldots, I_i, \ldots, I_n$ je monotono opadajući. To je logično jer se kamate računaju na ostatak duga koji je sve manji i manji.

Polazeći od formule kojom se izračunavaju anuiteti $a_i = \sigma + I_i = \frac{K}{n} + I_i$, dobijamo

$a_{i+1} - a_i = \frac{K}{n} + I_{i+1} - \left(\frac{K}{n} + I_i\right) = I_{i+1} - I_i < 0 \Rightarrow a_{i+1} < a_i$, što znači da se i anuiteti pri amortizaciji kredita ovom metodom smanjuju, pa je dužnik najviše opterećen varćanjem kredita u prvom anuitetu.

U praksi se zbog bolje evidencije, što je od zmačaja i za poverica i za dužnika, pravi takozvani amortizacioni plan u vidu tabele što ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer. Napraviti plan amortizacije kredita od 10000 dinara metodom jednakih otplata sa deset tromesečnih anuiteta po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 7,5% godišnje.

Redni broj anuiteta	*Otplata:* $\sigma = \frac{K}{n}$	*Kamata* I_i $I_i = S_{i-1}\frac{p}{m}$	*Anuitet* $a_i = \sigma + I_i$	*Stanje duga* $S_0 = K = 10000, S_i = K - i\cdot\sigma$
1	*1000*	*187,50*	*1187,50*	*9000*
2	*1000*	*168,75*	*1168,75*	*8000*
3	*1000*	*150,50*	*1150,50*	*7000*
4	*1000*	*131,25*	*1131,25*	*6000*
5	*1000*	*112,50*	*1112,50*	*5000*
6	*1000*	*93,75*	*1093,75*	*4000*
7	*1000*	*75,00*	*1075,00*	*3000*
8	*1000*	*56,25*	*1056,25*	*2000*
9	*1000*	*37,50*	*1037,50*	*1000*
10	*1000*	*18,75*	*1018,75*	*0*
Σ	*10000 = K*	*1031,75*	*11031,75*	

Najpre izračunavamo fiksnu otpaltu $\sigma = \frac{K}{n} = \frac{10000}{10} = 1000$ i popunjavamo drugu i petu kolonu, jer je $S_1 = K - \sigma = 10000 - 1000 = 9000, S_2 = K - 2\sigma = 10000 - 2000 = 8000$ i tako dalje $S_9 = 1000, S_{10} = 0$. Nakon toga izračunavamo kolonu za kamate po formuli

$I_i = S_{i-1}\frac{p}{m}$. $p = 0{,}075$, $m = 12/3 = 4$,

$\frac{p}{m} = \frac{0{,}075}{4} = 0{,}01875$ pa je $I_1 = S_0\frac{p}{m} = 10000\cdot 0{,}01875 = 187{,}5$

$I_2 = S_1\frac{p}{m} = 9000\cdot 0{,}01875 = 168{,}75$ itd. Dobijeni rezultati se unose u kolonu za kamate. Kako je $a_i = \sigma + I_i$, kolonu anuiteta dobijamo sabiranjem vrednosti u kolaonama otpalte i kamate.

Kontrola.Treba proveriti da li je zbir svih kamata jednak vrednosti koja se dobija po formuli $I = \frac{K\cdot p\cdot(n+1)}{2m}$, i da li je zbir druge i treće kolone jednak zbiru četvrte kolone.

Razmatrajući odnos relativne i konformne kamate primetili smo da je ekonomski opravdano koristiti konformnu umesto relativne kamate. Ako u prethodnim formulama umesto relativne $\frac{p}{m}$ upotrebimo konformnu kamatu $p_{k,m}$, formule će dobiti oblik

$$I_i = K\cdot p_{k,m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right),\ a_i = \frac{K}{n} + K\cdot p_{k,m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right), I = \frac{K\cdot p_{k,m}}{2}(n+1),$$

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = \frac{K\cdot p\cdot k}{2mn}(2n-k+1),\ \sum_{i=j}^{k} I_i = \frac{K\cdot p_{k,m}}{2n}(k(2n-k+1)-(j-1)(2n-j+2)),$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = k\cdot\frac{K}{n}+\frac{K\cdot p_{k,m}\cdot k}{2n}(2n-k+1),$$

$$\sum_{i=j}^{k} a_i = (k-j+1)\cdot\frac{K}{n}+\frac{K\cdot p_{k,m}}{2n}(k(2n-k+1)-(j-1)(2n-j+2)).$$

Primer 3. Neki kredit se amortizuje za 4 godine i 9 meseci metodom amortizacije sa jednakim otplatama sa tromesečnim anuitetima po godišnjoj dekurzivnoj stopi od 9,36%. Ako se zna da se koristi konformna kamatna stopa, pri čemu je zbir anuiteta počev od 8-og zaključno sa 15-tim 3712 dinara izračunati iznos kredita, ukupnu kamatu, zbir kamata sadržanim u anuitetima počev od 6-og do 14-og i 17-ti anuitet.

Rešenje. t = 4 god. 9mes. m = 12/3 = 4, p = 0,0936, $\sum_{i=8}^{i=15} a_i = 3712$, n=tm= 4·4 + 9/3 = 19,

K=?, I = ?, $\sum_{i=6}^{14} I_i = ?$, a_{17} = ?

Veza između relativne i konformne kamatne stope data je formulom $(1+p_{k,m})^m = 1+p$, odakle možemo izračunati konformnu kamatnu stopu $p_{k,m} = \sqrt[m]{1+p}-1$, pa će u ovom slučaju biti $p_{k,4} = \sqrt[4]{1+0{,}0936}-1 = 0{,}0226$.

Pošto nam je dat zbir anuiteta od 8. do 15. iz formule za zbir anuiteta $\sum_{i=j}^{k} a_i = (k-j+1)\cdot\frac{K}{n}+\frac{K\cdot p_{k,m}}{2n}(k(2n-k+1)-(j-1)(2n-j+2))$, izračunaćemo iznos kredita K. j = 8, k = 15 $\Rightarrow$

$$(15-8+1)\cdot\frac{K}{19}+\frac{K\cdot 0{,}0226}{2\cdot 19}\cdot(15\cdot(38-15+1)-(8-1)(38-8+1)) = 3712$$

$$0{,}4211K+0{,}0851K = 3712 \Rightarrow K = \frac{3712}{0{,}5062} = 7333{,}08$$

Ukupnu kamatu ćemo izračunati po obrascu

$$I = \frac{K\cdot p_{k,m}}{2}(n+1) \Rightarrow I = \frac{7333{,}08\cdot 0{,}0226}{2}\cdot(19+1) = 1657{,}276$$

Kamatu sadržanu u anuitetima počev od 6. do 14. računamo po formuli

$$\sum_{i=j}^{k} I_i = \frac{K\cdot p_{k,m}}{2n}(k(2n-k+1)-(j-1)(2n-j+2))$$

$$\Rightarrow \sum_{i=6}^{14} I_i = \frac{7333{,}08\cdot 0{,}0226}{38}\cdot(14\cdot(38-14+1)-(6-1)(38-6+2)) = 785{,}026$$

17-ti anuitet računamo po formuli $a_i = \frac{K}{n}+K\cdot p_{k,m}\cdot\left(1-\frac{i-1}{n}\right)$

$$a_{17} = \frac{7333{,}08}{19} + 7333{,}08 \cdot 0{,}0226 \cdot \left(1 - \frac{17-1}{19}\right) = 412{,}12$$

10.3.2. Amortizacija kredita metodom jednakih anuiteta sa dekurzivnom kamatnom stopom

Pri amortizaciji kredita metodom jednakih anuiteta, dužnik je nominalno jednako opterećen u svim periodima otpalte kredita. Otplate i kamate su promenljive veličine.
Pretpostavimo da se kredit od K novčanih jedinica amortizuje za period od t godina sa m anuiteta godišnje po dekurzivnoj godišnjoj kamatnoj stopi p. Obeležimo sa $r = 1 + \frac{p}{m}$ ukoliko se koristi relativna kamatna stopa, ili $r = 1 + p_{k,m}$ ukoliko se koristi konformna kamatna stopa.
Metodologija izračunavanja se zasniva na sledećem: ostatak duga S_i, nakon vraćenog i-tog anuiteta, se definiše kao zbir ostatka duga S_{i-1} i kamate na taj dug u jednom obračunskom periodu sa kamtnom stopom $\frac{p}{m}$ za taj period (ili $p_{k,m}$) umanjen za isplaćeni anuitet nakon tog obračunskog perioda.

$$S_i = S_{i-1} + S_{i-1}\frac{p}{m} - a, i = 1, 2, \ldots, n \quad n = tm, \; S_0 = K,$$

Polazeći od ove formule, stanje duga nakon vraćenog prvog anuiteta je

$$S_1 = S_0 + S_0\frac{p}{m} - a = K + K\frac{p}{m} - a = K\left(1 + \frac{p}{m}\right) - a \Rightarrow S_1 = K \cdot r - a\,.$$

Stanje duga posle vraćenog drugog anuiteta je

$$S_2 = S_1 + S_1\frac{p}{m} - a = S_1\left(1 + \frac{p}{m}\right) - a = S_1 \cdot r - a = (K \cdot r - a) \cdot r - a \Rightarrow S_2 = K \cdot r^2 - a \cdot r - a$$

Stanje duga posle vraćenog trećeg anuiteta je

$$S_3 = S_2 + S_2\frac{p}{m} - a = S_2\left(1 + \frac{p}{m}\right) - a = S_2 \cdot r - a = (K \cdot r^2 - a \cdot r - a) \cdot r - a$$

$$S_3 = K \cdot r^3 - a \cdot r^2 - a \cdot r - a$$

Na osnovu izraza za S_1, S_2 i S_3 zaključujemo da je stanje duga posle vraćenog i-tog anuiteta

$S_i = S_{i-1} + S_{i-1}\frac{p}{m} - a$, odnosno nakon sređivanja

$$S_i = K \cdot r^i - ar^{i-1} - ar^{i-2} - \ldots . ar - a = K \cdot r^i - a(1 + r + r^2 + \ldots + r^{i-1})$$

$1 + r + r^2 + \ldots + r^{i-1}$ predstavlja zbira prvih i – 1 članova geometrijske progresije čiji je prvi član $a_1 = 1$, $q = r$. Zbir prvih n članova geometrijske progresije se izračunava po formuli

$S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, pa je $1 + r + r^2 + \ldots + r^{i-1} = 1 \cdot \dfrac{r^i - 1}{r - 1} = \dfrac{r^i - 1}{r - 1}$, tako da za S_i dobijamo

$$S_i = K \cdot r^i - a \frac{r^i - 1}{r - 1} \text{ za } i = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

$S_n = 0$, jer je nakon isplate poslednjeg n-tog anuiteta dužnik isplatio dug.

$$S_n = 0 \Leftrightarrow K \cdot r^n - a \frac{r^n - 1}{r - 1} = 0 \Rightarrow a = K \cdot r^n \cdot \frac{r - 1}{r^n - 1} = K \cdot \frac{r - 1}{1 - r^{-n}}$$

Dakle formula za izračunavanje konstantnog anuiteta je $a = K \cdot \dfrac{r - 1}{1 - r^{-n}}$.

Izraz $\dfrac{r - 1}{1 - r^{-n}}$ predstavlja procentualno učešće anuiteta u celom kreditu. Ako a zamenimo u formuli za S_i dobićemo

$$S_i = K \cdot r^i - K \cdot \frac{r - 1}{1 - r^{-n}} \cdot \frac{r^i - 1}{r - 1} = K \cdot r^i - K \cdot r^n \cdot \frac{r^i - 1}{r^n - 1} = K \cdot \frac{r^i (r^n - 1) - r^n (r^i - 1)}{r^n - 1}$$

$\Rightarrow S_i = K \dfrac{r^n - r^i}{r^n - 1}$. Ovom formulom se na osnovu K, t, m i p izračunava stanje duga S_i nakon vraćenog i-tog anuiteta, za svako $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Ako K treba izraziti preko a ili preko S_i, onda se iz prethodnih formula dobija $K = a \cdot \dfrac{1 - r^{-n}}{r - 1}$, odnosno $K = S_i \cdot \dfrac{r^n - 1}{r^n - r^i}$. Direktnu vezu između a i S_i dobijamo izjednačavanjem ovih formula za K.

$$a \cdot \frac{1 - r^{-n}}{r - 1} = S_i \cdot \frac{r^n - 1}{r^n - r^i} \Rightarrow a = S_i \frac{r^n - 1}{r^n - r^i} \cdot \frac{r - 1}{1 - r^{-n}} = S_i \frac{r^n - 1}{r^n - r^i} \cdot \frac{r^n (r - 1)}{r^n - 1}$$

$$\Rightarrow a = S_i \frac{r^n (r - 1)}{r^n - r^i} \text{ i } S_i = a \frac{r^n - r^i}{r^n (r - 1)}.$$

Ukupna kamata pri amortizaciji kredita ovom metodom je razlika svih vraćenih anuiteta i uzetog kredita $I = n \cdot a - K$.

Primer 4. Kredit od 368000 dinara se amortizuje metodom tromesečnih jednakih anuiteta po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 12,6% za vreme od 6 godine i 9 meseci. Izračunati anuitet, stanje duga posle 12-tog anuiteta i ukupnu kamatu.

Rešenje. $K = 368000$, $m = 12/3 = 4$, $p = 0{,}126$, $t = 6$god. 9mes., $a = ?$, $S_{12} = ?$

$n = tm = 6 \cdot 4 + 9/3 = 27$, $r = 1 + \dfrac{0{,}126}{4} = 1{,}0315$

Anuitet računamo po formuli $a = K \cdot \dfrac{r - 1}{1 - r^{-n}} \Rightarrow a = 368000 \cdot \dfrac{1{,}0315 - 1}{1 - 1{,}0315^{-27}} = 20438{,}797$

Stanje duga posle 12. anuiteta računamo po formuli $S_i = K\frac{r^n - r^i}{r^n - 1}$

$$\Rightarrow S_{12} = 368000 \cdot \frac{1{,}0315^{27} - 1{,}0315^{12}}{1{,}0315^{27} - 1} = 241363$$

Ukupnu kamatu računamo po formuli $I = na - K$= 27·20438,797 – 368000 = 183847,519.

Učešće kamate i otplate u *i*-tom anuitetu

Kamata sadržana u i-tom anuitetu računa se na stanje duga nakon vraćenog prethodnog anuiteta, pa je

$I_i = S_{i-1}\frac{p}{m}$, ili kako je $r = 1 + \frac{p}{m} \Rightarrow \frac{p}{m} = r - 1$ kamata se može izraziti $I_i = K(r-1)\frac{r^n - r^{i-1}}{r^n - 1}$.

Kakao je $a = \sigma_i + I_i \Rightarrow \sigma_i = a - I_i$ kad ovde zamenimo I_i dobijamo formulu za i-tu otplatu

$$\sigma_i = K\frac{r-1}{1-r^{-n}} - K(r-1)\frac{r^n - r^{i-1}}{r^n - 1} = K(r-1)\left(\frac{1}{1-r^{-n}} - \frac{r^n - r^{i-1}}{r^n - 1}\right) =$$

$$= K(r-1)\left(\frac{r^n}{r^n - 1} - \frac{r^n - r^{i-1}}{r^n - 1}\right) = K(r-1)\frac{r^{i-1}}{r^n - 1}.$$

i-tu otplatu možemo izraziti i drugačije $\sigma_i = K(r-1)\frac{r^{i-1}}{r^n - 1} = r^{i-1}K(r-1)\frac{r^{-n}}{1-r^{-n}}$

$$= r^{i-1}K(r-1)\frac{1-1+r^{-n}}{1-r^{-n}} = r^{i-1}K(r-1)\left(\frac{1}{1-r^{-n}} - \frac{1-r^{-n}}{1-r^{-n}}\right) = r^{i-1}\left(K\frac{r-1}{1-r^{-n}} - K(r-1)\right)$$

$\sigma_i = r^{i-1}(a - I_1) = r^{i-1}\sigma_1$ jer je $K(r-1) = K\frac{p}{m} = I_1$. Takođe je i $\sigma_i = S_{i-1} - S_i$, $\sigma_n = S_{n-1}$, $S_n =$ 0.

Primer 5. Odrediti ukupnu kamatu i stanje duga posle vraćenog 15-tog anuiteta, ako se kredit amortizuje metodom jednakih mesečnih anuiteta, po dekurzivnoj stopi od 10,14% godišnje za vreme od 3 godine pri čemu je 18-ta otplata (učešće otplate u 18-tom anuitetu) 14900 dinara.

Rešenje. p = 0,1014, t = 3god., m = 12, n = 3·12 = 36, σ_{18} = 14900, I = ?, S_i = ?

Kako je $I = na - K$ moramo najpre da odredimo K i a. $r = 1 + \frac{0{,}1014}{12} = 1{,}00845$

Kako nam je data 18-ta otplata, vrednost kredita ćemo izračunati iz formule

$$\sigma_i = K(r-1)\frac{r^{i-1}}{r^n - 1} \Rightarrow K = \frac{\sigma_i}{r-1} \cdot \frac{r^n - 1}{r^{i-1}} \Rightarrow K = \frac{14900}{1{,}00845 - 1} \cdot \frac{1{,}00845^{36} - 1}{1{,}00845^{17}} = 540700{,}602$$

Anuitet računamo po formuli $a = K \cdot \frac{r-1}{1-r^{-n}} \Rightarrow a = 540700 \cdot \frac{1{,}00845 - 1}{1 - 1{,}00845^{-36}} = 17485{,}324$,

pa je ukupna kamata I = 36 ·17485,324 – 540700,602 = 88771,062.

Stanje duga nakon vraćenog 15. anuiteta je

$$S_{15} = K\frac{r^{36} - r^{15}}{r^{36} - 1} = 540700 \cdot \frac{1{,}00845^{36} - 1{,}00845^{15}}{1{,}00845^{36} - 1} = 335125{,}86$$

Otplaćeni deo duga nakon isplaćenog *i*-tog anuiteta

Kako je zbir otplaćenog dela duga (Q_i) i ostatka duga (S_i) nakon ispalćenog i-tog anuiteta jednak celom iznosu duga (kredita) K, to iz $Q_i + S_i = K$ na osnovu dobijene formule za S_i dobijamo

$$Q_i = K - S_i = K - K\frac{r^n - r^i}{r^n - 1} = K\frac{r^n - 1 - (r^n - r^i)}{r^n - 1}, \text{ odnosno } Q_i = K\frac{r^i - 1}{r^n - 1}.$$

Otplaćeni deo duga posle i-tog anuiteta može se izraziti i kao zbir prvih i otplata

$$Q_i = \sum_{k=1}^{i} \sigma_k = \sum_{k=1}^{i} r^{k-1}(a - I_1) = (a - I_1)\sum_{k=1}^{i} r^{k-1} = (a - I_1)(r^0 + r + r^2 + \ldots + r^{i-1}) =$$

$$= (a - I_1)\frac{r^i - 1}{r - 1} = \left(K\frac{r-1}{1 - r^{-n}} - K\frac{p}{m}\right)\frac{r^i - 1}{r - 1} = \left(K\frac{(r-1)r^n}{r^n - 1} - K(r-1)\right)\frac{r^i - 1}{r - 1} =$$

$$= K(r-1)\left(\frac{r^n - (r^n - 1)}{r^n - 1}\right)\frac{r^i - 1}{r - 1} = K\frac{r^i - 1}{r^n - 1}$$

Dakle $Q_i = \sum_{k=1}^{i} \sigma_k = K\frac{r^i - 1}{r^n - 1}$

Zbir otplata i zbir kamata sadržanih u anuitetima počev od *j*-tog do *k*-tog anuiteta

Zbir prvih k otplata jednak je otplaćenom delu duga nakon k-tog anuiteta, pa primenom prethodno dobijene formule taj zbir iznosi

$$\sum_{i=1}^{k} \sigma_i = K\frac{r^k - 1}{r^n - 1}.$$

Zbir otplata u anuitetima počev od j-tog do k-tog anuiteta dobija se kao razlika

$$\sum_{i=j}^{k} \sigma_i = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i - \sum_{i=1}^{j-1} \sigma_i = K\frac{r^k - 1}{r^n - 1} - K\frac{r^{j-1} - 1}{r^n - 1} = K\frac{r^k - r^{j-1}}{r^n - 1}$$

Dakle $\sum_{i=j}^{k} \sigma_i = K\frac{r^k - r^{j-1}}{r^n - 1}$.

Kamatu sadržanu u i-tom anuitetu možemo izraziti kao $I_i = a - \sigma_i$, pa je zbir kamata sadržanih u prvih k anuiteta

$\sum_{i=1}^{k} I_i = \sum_{i=1}^{k}(a - \sigma_i) = \sum_{i=1}^{k} a - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i = k \cdot a - K\frac{r^k - 1}{r^n - 1}$. Na osnovu ove formule dobijamo zbir kamata sadržanih u anuitetima od i-tog do j-tog

$$\sum_{i=j}^{k} I_i = \sum_{i=1}^{k} I_i - \sum_{i=1}^{j-1} I_i = k\cdot a - K\frac{r^k-1}{r^n-1} - \left((j-1)\cdot a - K\frac{r^{j-1}-1}{r^n-1}\right)$$

$$\sum_{i=j}^{k} I_i = (k-j+1)\cdot a - K\frac{r^k - r^{j-1}}{r^n-1}.$$

Analiaza amortizacije kredita metodom jenakih anuiteta i amortizacioni plan

S obzirom a je $a =$ cons. to je dužnik nominalno podjednako opterećen u toku čitavog perioda amorizacije kredita. Posmatramo niz otplata (σ_i) gde je $\sigma_i = r^{i-1}\sigma_1$.

$\frac{\sigma_{i+1}}{\sigma_i} = \frac{r^i\sigma_1}{r^{i-1}\sigma_1} = r > 1 \Rightarrow \sigma_{i+1} > \sigma_i$ što znači da se otplate u anuitetima povećavaju. Sa prvim anuitetima se stanje duga procentualno manje smanjuje, dok se najveće otplate duga vraćaju u zadnjim anuitetima.

Iz $S_i > S_{i+1} \Rightarrow S_i\frac{p}{m} > S_{i+1}\frac{p}{m} \Leftrightarrow I_i > I_{i+1}$ sledi da je niz kamata (I_i) opadajući, što znači da se kamate iz anuiteta u anuitet smanjuju.

Evidencija amortizacije kredita se i kod ove metode može pregledno prikazati tabelom.

Primer. Napraviti plan amortizacije kredita od 10000 dinara sa deset jednakih tromesečnih anuiteta po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 7,5%.

Redni broj anuiteta	*Anuitet* a	*Kamata* $I_i = S_{i-1}\frac{p}{m}$	*Otplata* $\sigma_i = a - I_i$	*Stanje duga* S_i $S_0 = K = 10000$
1	*1105,995*	*187,500*	*918,495*	*9081,505*
2	*1105,995*	*172,095*	*933,900*	*8147,605*
3	*1105,995*	*152,768*	*953,227*	*7194,378*
4	*1105,995*	*134,895*	*971,100*	*6223,278*
5	*1105,995*	*116,686*	*989,309*	*5233,969*
6	*1105,995*	*98,137*	*1007,858*	*4226,111*
7	*1105,995*	*79,240*	*1026,755*	*3199,356*
8	*1105,995*	*59,988*	*1046,607*	*2153,349*
9	*1105,995*	*40,375*	*1065,620*	*1087,729*
10	*1105,995*	*21,395*	*1087,700*	*0*
Σ	*11059,95*	*1063,079*	*10000,571*	

Za $K = 10000$, $m = 4$, $p = 0{,}075$, $n = 10$, $\Rightarrow r = 1 + \frac{p}{m} = 1 + \frac{0{,}075}{4} = 1{,}01875$. Najpre se izračunava anuitet $a = K\cdot\frac{r-1}{1-r^{-n}} = 10000\frac{1{,}01875-1}{1-1{,}01875^{-10}} = 1105{,}995$.

Kamatu izračunavamo po formuli $I_i = S_{i-1}\dfrac{p}{m}$, pa je

$I_1 = S_0 \dfrac{p}{m} = 10000 \cdot 0{,}01875 = 187{,}5$, otplatu računamo po formuli $\sigma_i = a - I_i$, pa je

$\sigma_1 = 1105{,}995 - 187{,}5 = 918{,}495$. Kako je $\sigma_i = S_{i-1} - S_i \Rightarrow S_i = S_{i-1} - \sigma_i$.

$S_1 = S_0 - \sigma_1 = 10000 - 918{,}495 = 9081{,}505$

$I_2 = S_1 \dfrac{p}{m} = 9081{,}505 \cdot 0{,}01875 = 172{,}095 \Rightarrow \sigma_2 = a - I_2 = 1105{,}995 - 172{,}095 = 933{,}900$

$\Rightarrow S_2 = S_1 - \sigma_1 = 9081{,}505 - 918{,}495 = 8147{,}605$

Ovim postupkom popunjavamo tabelu. Kontrola ispravnosti izračunavanja je $S_n = 0$ i $\sigma_n = S_{n-1}$. moguće je i $S_n \approx 0$ i $\sigma_n \approx S_{n-1}$ zbog zaokruživanja rezultata prilikom računanja.

Takođe je $\sum_{i=1}^{n} a = na = \sum_{i=1}^{n} I_i + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i$ i $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i = K$. Odstupanja u ovom primeru su dozvoljena i rezultat su zaokruživanja.

Umesto relativne $\dfrac{p}{m}$, u obrascima možemo koristiti i konformnu kamatnu stopu $p_{k,m}$ za koju smo već pokazali da je ekonomski opravdana.

Primer 6. Ako se kredit od 1000000 dinara amortizuje za 5 godina tromesečnim anuitetima po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 12% godišnje, izračunati stanje duga posle 10 isplaćenih anuiteta kao i ukupnu kamatau:

a) po metodi jednakih otplata,
b) po metodi jednakih anuiteta.

Rešenje. $K = 1000000$, $t = 5$god., $m = 12/3 = 4$, $n = tm = 5 \cdot 4 = 20$, $p = 0{,}12$,

$r = 1 + \dfrac{0{,}12}{4} = 1{,}03$, $S_{10} = ?$ $I = ?$

a) stanje duga po metodi jednakih otplata nakon i-tog anuiteta, računa se po formuli

$$S_i = K - i\sigma = K - i\frac{K}{n} \Rightarrow S_{10} = 1000000 - 10\frac{1000000}{20} = 500000$$

ukupna kamata je $I = \dfrac{K \cdot p(n+1)}{2m} = \dfrac{1000000 \cdot 0{,}12 \cdot 21}{8} = 315000$.

b) stanje duga po metodi jednakih anuiteta nakon i-tog anuiteta, računa se po formuli

$$S_i = K\frac{r^n - r^i}{r^n - 1}, \text{ pa je } S_{10} = 1000000 \cdot \frac{1{,}03^{20} - 1{,}03^{10}}{1{,}03^{20} - 1} = 573200{,}993$$

ukupna kamata je $I = n \cdot a - K = n \cdot K \cdot \dfrac{r-1}{1 - r^{-n}} - K =$

$$= 20 \cdot 1000000 \cdot \frac{1{,}03 - 1}{1 - 1{,}03^{-20}} - 1000000 = 344387{,}184.$$

Zadaci

1. Na koje vreme je uložen kapital od 96480 dinara uz tromesečno kapitalisanje sa dekurzivnom kamatnom stopom od 10,2% ako je narastao na 140757,7 dinara (30, 360)?

$K_0 = 96480$, *početna vrednost kapitala*
$m = 12/3 = 4$, *broj obračunskih perioda u toku jedne godine*
$p = 0{,}102$, *kamatna stopa*
$K_s = 140757{,}7$ *krajnja vrednost kapitala (umesto K_s mogli smo upotrebiti i oznaku K_{tm} jer još uvek ne znamo da li je u pitanju složen ili kombinovan prost i složen kamatni račun)*

$t = ?$ *traži se vreme na koje je potrebno uložiti početni kapital;*
(30, 360) znači da će se u ovom slučaju računati da svaki mesec ima 30 dana, a godina 360 dana;

Za izračunavanje vremena koristimo formulu $t' = \dfrac{\log\dfrac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r}$. $r = 1 + \dfrac{p}{m} = 1 + \dfrac{0{,}102}{4} = 1{,}0255$

$$t' = \frac{\log\dfrac{140757{,}7}{96480}}{4\log 1{,}0255} = \frac{0{,}164035}{4\cdot 0{,}01094} = 3{,}74852$$

Celi deo ovog broja je broj godina, a deo iza decimalnog zareza množimo sa 360 kako bi dobili broj dana. Inače neophodno je pri izračunavanjima koristiti najmanje četiri decimale da bi dobili što precizniji rezultat. Zaokruživanje na manji broj decimala dovodi do grešaka koje se u finansijama ne mogu tolerisati. Zato je u ovom slučaju za izračunavanje vršeno zaokruživanje na 5 decimala.

$0{,}74852 \cdot 360 = 269{,}4672 \approx 270$ dana = 9 meseci
t' = 3 godine 9 meseci; kako je $t_m = 3\cdot 4 + 9/3 = 15$, odnosno dobijeno vreme sadrži ceo broj obračunskih perioda ($t_d = 0$), u pitanju je složen kamatni račun.
Dakle kapital je potrebno uložiti na t = 3 godine i 9 meseci.

2. Kapital od 20000 dinara uložen je na vreme od 3 godine i 196 dana po dekurzivnoj kamatnoj stopi od 15% i tromesečno kapiatlisanje. Na koje vreme treba uložiti kapital od 15000 dinara uz tromesečno kapitalisanje po stopi od 18% pa da on donese dva puta veću kamatu?

$K_0 = 20\,000$ *početna vrednost prvog kapitala*
t = 3 god. 196 dana
$p = 0{,}15$
$m = 12/3 = 4$

K_0' = 15 000 *početna vrednost drugog kapitala*
m' = 4
p' = 0,18
I' = 2*I*

---

t' = ?

$$t' = \frac{\log \frac{K_{tm}}{K_0}}{m \log r}$$ za izračunavanje vremena nam je potrebna krajnja vrednost kapitala koju nemamo, ali imamo podatak da je kamata dva puta veća od kamate dobijene prilikom ulaganja prvog kapitala.

Kamatu koja se dobija nakon ulaganja prvog kapitala računamo kao razliku između početne i krajnje vrednosti kapitala.

Potrebo je najpre izračunati broj obračunski perioda u zadatom vremenu
t = 3 god 196 dana = 3god. 6 mes. 16 dana
pa je $t_m = 3 \cdot 4 + 6/3 = 12 + 2 = 14$ i ostaje nam još $t_d = 16$ dana. Nakon 14 obračunskih perioda ostaje nam još 16 dana što nam ukazuje da se radi o kombinovanom prostom i složenom računu. Zato ćemo krajnju vrednost kapitala računati po formuli

$$K_s = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p \cdot t_d}{365}\right) = 20000\left(1+\frac{0,15}{4}\right)^{14}\left(1+\frac{0,15 \cdot 16}{365}\right) =$$

$$= 20000 \cdot 1,6743 \cdot 1.00658 = 33706,34$$

$I = 33706,34 - 20000 = 13706,34$

$I' = 2 \cdot 13706,34 = 27412,68$, $K_s' = K_0' + I' = 15000 + 27412,68 = 42412,68$

$$r = 1+\frac{p}{m} = 1+\frac{0,18}{4} = 1,045\,,\ t' = \frac{\log \frac{K_{tm}}{K_0}}{m \log r} = \frac{\log \frac{42412,68}{15000}}{4 \log 1,045} = \frac{0.45141}{4 \cdot 0,01912} = 5,9023$$

$0,9023 \cdot 365 = 329,34 \approx 329$ dana = 10 mes. 29 dana

t' = 5 god. 10 mes. 29 dana; kako je $t_m = 5 \cdot 4 + 10/3 = 20 + 3 = 23$

za t_m smo uzeli 5 godine i 9 meseci, a ostatak vremena koji je manji od jednog obračunskog perioda izračunavamo po formuli

$$t_d = \frac{365}{p}\left(\frac{K_s}{K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}} - 1\right) = \frac{365}{0,18}\left(\frac{42412,68}{15000\left(1+\frac{0,18}{4}\right)^{23}} - 1\right) = 55,514 \approx 56$$

Ukupno vreme će biti $t = t' + t_d$ = 5 god. 9 mes. 56 dana = 5god. 10 mes. 26 dana.

3. Koliku kamatu donosi kapital od 56000 dinara uložen na 2 godine 9 meseci i 16 dana, sa godišnjom dekurzivnom kamatnom stopom 9,12% i polugodišnjim kapitalisanjem? Koliku kamatu bi doneo da je uložen pod istim uslovima sa anticipativnom kamatnom stopom 9,12%?

$K_0 = 56000$
$t = 2$ god. 9 mes. 16 dana
$p = 9{,}12\% = 0{,}0912$
$m = [12/6] = 2$
$q = p$

$I_d = ?\quad I_a = ?$

Najpre ćemo odrediti broj obračunskih perioda u zadatom vremenu.
$t_m = 2\cdot 2 + [9/6] = 4 + 1 = 5$ (zagrade [] označavaju da se radi o „celobrojnom deljenju“, tj uzima se samo celi deo dobijenog broja)
vreme koje je preostalo preko 5 obračunskih perioda je $t_d = 3$ mes. 16 dana = 106 dana;
Zato što je $t_d \neq 0$, (vreme nije jednako celom broju obračunskih perioda) u pitanju je model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja, pa ćemo za izračunavanje krajnje vrednosti kapitala upotrebiti formulu

$$K_s = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right) = 56000\left(1+\frac{0{,}0912}{2}\right)^5\left(1+\frac{0{,}0912\cdot 106}{365}\right) =$$

$$= 56000\cdot 1{,}24976\cdot 1{,}02649 = 71840{,}50$$

Kamatu izračunavamo kao razliku krajnje i početne vrednosti kapitala.
$I = K_s - K_0 = 71840{,}50 - 56000 = 5840{,}50$

Kod kapitalisanja anticipativnom kamatnom stopom koristimo formulu

$$K_s = \frac{K_0}{\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}\left(1-\frac{q\cdot t_d}{365}\right)} = \frac{56000}{\left(1-\frac{0.0912}{2}\right)^5\left(1-\frac{0{,}0912\cdot 106}{365}\right)} =$$

$$= \frac{56000}{0{,}79187\cdot 0.97352} = 72642{,}25$$

$I_d = 72642{,}25 - 56000 = 6642{,}25.$

4. Kredit od 100000 dinara se amortizuje metodom jednakih otplata za 5 godina sa tromesečnim anuitetima tako da je učešće kamate u petnaestom anuitetu 522,3 dinara. Ako se kamata izračunava sa odgovarajućom konformnom kamatnom stopom, izračunati ukupnu kamatu.

$K = 100000$
$t = 5$ god.
$m = 12/3 = 4$
$I_{15} = 522{,}3$

$I = ?$

$n = 5 \cdot 4 = 20$ broj anuiteta (rata)

za izračunavanje ukupne kamate nepoznata nam je kamatna stopa koju ćemo izračunati iz obrasca $I_i = \frac{K \cdot p}{m}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \Rightarrow p = \frac{I_i \cdot m}{K \cdot \left(1 - \frac{i-1}{n}\right)} = \frac{522{,}3 \cdot 4}{100000 \cdot \left(1 - \frac{15-1}{20}\right)} = 0{,}06964$

vezu između konformne i relativne kamatne stope daje obrazac

$p = (1 + p_{k,m})^m - 1$. Odatle je konformna kamatna stopa

$$p_{k,m} = \sqrt[m]{p+1} - 1 = \sqrt[4]{1 + 0{,}6964} - 1 = 0{,}01697$$

U obrascu za izračunavanje ukupne kamate $I = \frac{K \cdot p(n+1)}{2m}$, umesto $\frac{p}{m}$, stavićemo konformnu kamatnu stopu, pa obrazac dobija oblik

$I = \frac{K \cdot p_{k,m}(n+1)}{2} = \frac{100000 \cdot 0{,}01697 \cdot 21}{2} = 17818{,}5$ - ukupna kamata.

5. Kredit od 368000 dinara se amortizuje mesečno metodom jednakih anuiteta po godišnjoj dekurzivnoj kamatnoj stopi od 12,6% za vreme od 3 godine i 6 meseci. Izračunati vrednost anuiteta, stanje duga posle 12-tog anuiteta i ukupnu kamatu.

$K = 368000$
$p = 12{,}6\% = 0{,}126$
$t = 3$ god. 6 mes.
$m = 12$

$a = ?$
$S_{12} = ?$
$I = ?$

$n = 3 \cdot 12 + 6 = 42$

$$a = K \cdot \frac{r-1}{1-r^{-n}}, \quad r = 1 + \frac{p}{m} = 1 + \frac{0{,}126}{12} = 1{,}0105$$

Vrednost anuiteta je $a = 368000 \cdot \frac{1{,}0105 - 1}{1 - 1{,}0105^{-42}} = 10881{,}64$.

Stanje duga posle 12. anuiteta je $S_i = K\frac{r^n - r^i}{r^n - 1} = 368000 \cdot \frac{1{,}0105^{42} - 1{,}0105^{12}}{1{,}0105^{42} - 1} = 278763{,}57$.

Ukupnu kamatu izračunavamo po obrascu $I = na - K = 42 \cdot 10881{,}64 - 368000 = 89028{,}88$.

6. Kredit od 200000 se amortizuje metodom jednakih anuiteta za 2 godine i 6 meseci sa mesečnim anuitetima. Obračun kamate je po konformnoj kamatnoj stopi koja je ekvivalentna godišnjoj dekurzivnoj kamatnoj stopi od 8,56%. Izračunati koliko je ukupno vraćeno novca, učešće kamate u petom i otplate u dvadesetom anuitetu. Kolika bi bila ukupna kamata da je umesto konformne računata relativna kamatna stopa?

$K = 200000$
$t = 2$god. 6 mes.
$m = 12$
$p = 8{,}56\% = 0{,}0856$

$na = ?$
$I_5 = ?$
$\sigma_{20} = ?$
$I_k = ?$ *ukupna kamata sa konformnom kamatnom stopom*
$n = 2 \cdot 12 + 6 = 30$

$r = 1 + \dfrac{p}{m} = 1 + \dfrac{0{,}0856}{12} = 1{,}0071$, $a = K \cdot \dfrac{r-1}{1-r^{-n}} = 200000 \cdot \dfrac{1{,}0071 - 1}{1 - 1{,}0071^{-30}} = 7425{,}4$

Ukupno je vraćeno $30 \cdot 7425{,}4 = 222762$

Učešće kamate u petom anuitetu izračunavamo po obrascu $I_i = K(r-1)\dfrac{r^n - r^{i-1}}{r^n - 1}$

$$I_5 = 200000 \cdot (1{,}0071 - 1) \cdot \frac{1{,}0071^{30} - 1{,}0071^4}{1{,}0071^{30} - 1} = 1747{,}625$$

Učešće otplate u 20. anuitetu izračunavamo po obrascu $\sigma_i = K(r-1)\dfrac{r^{i-1}}{r^n - 1}$

$$\sigma_{20} = 200000 \cdot (1{,}0071 - 1) \cdot \frac{1{,}0071^{19}}{1{,}0071^{30} - 1} = 6869{,}442$$

Sada treba izračunati konfomnu kamatnu stopu iz relativne

$$p_{k,m} = \sqrt[m]{p+1} - 1 = \sqrt[12]{1 + 0{,}0856} - 1 = 0{,}006868$$

Moramo ponovo izračunati i r sa konformnom kamatnom stopom

$$r = 1 + p_{k,m} = 1 + 0{,}006868 = 1{,}006868$$

Vrednost anuiteta izračunata sa konformnom kamatnom stopom je

$a = 200000 \cdot \dfrac{1{,}006868 - 1}{1 - 1{,}006868^{-30}} = 7399{,}8$, pa je ukupna kamata zaračunata po konformnoj kamatnoj stopi $I = 30 \cdot 7399{,}8 - 200000 = 21994$.

Zadaci sa drugog kolokvijuma

Prva grupa

1.1. Izračunaj $a) \int \frac{2x^3+3x^2-4}{x^3+x}dx$, $b) \int_{-1}^{1} xln(x^2+1)dx.$

1.2. Izračunaj $a) \int x\sin(x^2+1)dx$, $b) \int_0^1 \frac{x}{e^x}dx$.

2. Funkcija tražnje za određeni proizvod X je $x=-0{,}5p+17500$. Ako je $T(x)=3x^2+50\cdot 10^6$ funkcija ukupnih troškova za proizvod X, naći:
a) oblast definisanosti funkcije tražnje,
b) interval rentabilnosti,
c) optimalni obim prozvodnje x_0, maksimalnu dobit i cenu p_0 u uslovima optimalne proizvodnje.

3.1. Odrediti kamatu koju donosi kapital od 18000 eura za vreme od 2godine i 128 dana tromesečnim kapitalisanjem uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 7,25%. Koliku bi kamatu doneo da je umesto relativne primenjena konformna kamatna stopa?

3.2. Kredit od 8000 eura amortizuje se mesečnim jednakim anuitetima za period od 5 godina i 6 meseci uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 17,52%. Izračunati vrednost anuiteta, ukupnu kamatu, stanje duga posle 20-tog anuiteta i učešće otplate u prvom i poslednjem anuitetu.

Druga grupa

1.1. Izračunaj $a) \int \frac{3x+4}{x^2-x+3}dx$, $b) \int_0^2 x^2 ln(x+1)dx$.

1.2. Izračunaj $a) \int xe^{x^2-1}dx$, $b) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x\sin 3x\, dx$.

2. Neka je za neki proizvod poznata funkcija graničnih prihoda $P_G=-4x+11000$ i funkcija ukupnih troškova $T(x)=2x^2+10\cdot 10^6$. odrediti interval rentabilnosti, optimalni obim proizvodnje i maksimalnu dobit.

3.1. Na koje vreme treba uložiti kapital od 2000 eura uz šestomesečno kapitalisanje i godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 7,58% da bi se njegova vrednost udvostručila.

3.2. Kredit od 128000 dinara amortizuje se metodom jednakih otplata mesečnim anuitetima na period od 2godine i 3 meseca uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 20,12%. Izračunati vrednost prvog, i poslednjeg anuiteta. Koliko je ukupno novca vraćeno? Koliko bi iznosila ukupna kamata da je umesto relativne primenjena odgovarajuća konformna kamatna stopa?

Treća grupa

1.1. Izračunaj $a)\int \frac{6x^4-5x^3+4x^2}{2x^2-x+1}dx$, $b)\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 ln\frac{1-x}{1+x}dx$.

1.2. Izračunaj $a)\int x\sqrt{x^2-3}\,dx$ $b)\int_{-1}^{1} x3^x dx$.

2. Data je inverzna funkcija tražnje $p=-4x+80000$ i funkcija ukupnih troškova $T(x)=4x^2+128\cdot 10^6$. Naći

a) oblast definisanosti funkcije tražnje,
b) interval rentabilnosti,
c) optimalni obim prozvodnje x_0, maksimalnu dobit i cenu p_0 u uslovima optimalne proizvodnje.

3.1. Kapital od 200000 dinara je uložen na 7 godina 8 meseci i 10 dana. Izračunati krajnju vrednost kapitala uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 18% i polugodišnje kapitalisanje. Kolika bi bila kamata da je umesto relativne primenjena odgovarajuća konformna kamatna stopa?

3.2. Kredit od 5000 eura amortizuje se za 4 godine mesečnim anuitetima sa godišnjom kamatnom stopom 18,25%. Odrediti stanje duga nakon prve godine ako se kredit amortizuje
a) metodom jednakih anuiteta
b) metodom jednakih otplata .
Kojom metodom je povoljnije amortizovati kredit i zašto?

Četvrta grupa

1.1. Izračunaj $a)\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx$, $b)\int_0^{\frac{1}{2}} xln\frac{1+x}{1-x}dx.$

1.2. Izračunaj $a)\int \frac{3xdx}{x^2+1}$, $b)\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$.

2. Neka je $p=-0.001x+80$ inverzna funkcija tražnje za neki prozvod i $T(x)=30x+10^5$ funkcija ukupnih troškova. Naći optimalnu prodajnu cenu p_0, ostvarenu maksimalnu dobit i interval rentabilne prozvodnje.

3.1. Izračunati kamatu koju donosi kapital od 60000 dinara uložen na 2 godine i 236 dana uz tromesečno kapitalisanje sa anticipativnom kamatnom stopom od 11,212%. Koliku bi kamatu doneo da je uložen pod istim uslovima sa dekurzivnom kamatnom stopom od 11,212% ?

3.2. Kredit od 168000 dinara amortizuje se za period od 3 godine metodom jednakih otplata uz godišnju dekurzivnu kamatnu stopu od 20,12%. Izračunaj vrednost prvog i 15-tog anuiteta
a) upotrebom relativne
b) upotrebom konformne kamatne stope.

c) Izračunaj razliku ukupnih kamata izračunatih primenom relativne i konformne kamatne stope.

FORMULE ZA FINANSIJSKU MATEMATIKU

Složen kamatni račun sa dekurzivnom kamatnom stopom

$$K_{tm} = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}, \ t = \frac{\log\frac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r}, \ p = m\left(\sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}}-1\right)$$

Preračunavanje kamatne stope sa jedne na drugu vrstu kapitalisanja

$$p_1 = m_1\left(\left(1+\frac{p_2}{m_2}\right)^{\frac{m_2}{m_1}}-1\right)$$

Odnos između relativne i komforne kamatne stope $p = (1+p_{k,m})^m - 1$

Model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja sa dekurzivnom kamatnom stopom

$$K_s = K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}\left(1+\frac{p\cdot t_d}{365}\right), \ r = 1+\frac{p}{m}, \ t' = \frac{\log\frac{K_{tm}}{K_0}}{m\log r}, \ t_d = \frac{365}{p}\left(\frac{K_s}{K_0\left(1+\frac{p}{m}\right)^{tm}}-1\right), \ t =$$

$t' + t_d$

Složen kamatni račun sa anticipativnim načinom kapitalisanja

$$K_{tm} = \frac{K_0}{\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}}, \ t = \frac{\log\frac{K_{tm}}{K_0}}{m\log\rho}, \ \rho = \frac{1}{1-\frac{q}{m}}, \ q = m - \frac{m}{\sqrt[tm]{\frac{K_{tm}}{K_0}}},$$

Model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja sa anticipativnom kamatnom stopom

$$K_s = \frac{K_0}{\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}\left(1-\frac{q\cdot t_d}{365}\right)}, \ t' = \frac{\log\frac{K_{tm}}{K_0}}{m\log\rho}, \ t_d = \frac{365}{q}\left(1-\frac{K_0}{K_s\left(1-\frac{q}{m}\right)^{tm}}\right), t = t' + t_d$$

Veza između anticipativne i dekurzivne kamatne stope $q = m - \frac{m^2}{m+p}$.

Amortizacija kredita metodom jednakih otplata sa dekurzivnom kamatnom stopom

$$\sigma=\frac{K}{n},\ S_i=K\left(1-\frac{i}{n}\right),\ I_i=\frac{K\cdot p}{m}\left(1-\frac{i-1}{n}\right),\ a_i=\sigma+I_i,\ Q_i=i\cdot\sigma=\frac{i\cdot K}{n}$$

Izračunavanje ukupne kamate i zbira kamata sadržanih u anuitetima počev od j-tog do k-tog $I=\frac{K\cdot p(n+1)}{2m}$, $\sum_{i=1}^{k} I_i=\frac{K\cdot p\cdot k}{2mn}(2n-k+1)$,

$$\sum_{i=j}^{k} I_i=\frac{Kp}{2mn}(k(2n-k+1)-(j-1)(2n-j+2)),$$

Zbir prvih k anuiteta $\sum_{i=1}^{k} a_i==k\frac{K}{n}+\frac{Kpk}{2mn}(2n-k+1)$

Zbir anuiteta počev od j-tog do k-tog je

$$\sum_{i=j}^{k} a_i=(k-j+1)\cdot\frac{K}{n}+\frac{Kp}{2mn}(k(2n-k+1)-(j-1)(2n-j+2))$$

Amortizacija kredita metodom jednakih anuiteta sa dekurzivnom kamatnom stopom

$r=1+\frac{p}{m}$ ili $r=1+p_{k,m}$, $a=K\cdot\frac{r-1}{1-r^{-n}}$, $S_i=K\frac{r^n-r^i}{r^n-1}$, $a=S_i\frac{r^n(r-1)}{r^n-r^i}$ i $S_i=a\frac{r^n-r^i}{r^n(r-1)}$,

$$Q_i=\sum_{k=1}^{i}\sigma_k=K\frac{r^i-1}{r^n-1}$$

Učešće kamate i otplate u i-tom anuitetu

$$I_i=K(r-1)\frac{r^n-r^{i-1}}{r^n-1},\ \sigma_i=K(r-1)\frac{r^{i-1}}{r^n-1}\ \text{ili}\ \sigma_i=r^{i-1}(a-I_1)=r^{i-1}\sigma_1$$

Izračunavanje ukupne kamate i zbira kamata i otplata sadržanih u anuitetima počev od j-tog do k-tog

$$I=na-K,\ \sum_{i=1}^{k} I_i=k\cdot a-K\frac{r^k-1}{r^n-1},\ \sum_{i=j}^{k} I_i=(k-j+1)\cdot a-K\frac{r^k-r^{j-1}}{r^n-1}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\sigma_i=K\frac{r^k-1}{r^n-1},\ \sum_{i=j}^{k}\sigma_i=K\frac{r^k-r^{j-1}}{r^n-1}$$

ISPITNA PITANJA IZ MATEMATIKE

1. Funkcija – preslikavanje (definicija i primeri).
2. Vrste preslikavanja (definicija i primeri).
3. Proizvod preslikavanja – složena funkcija (definicija i primeri).
4. Inverzna funkcija (definicija, određivanje, primeri).
5. Osobine realnih funkcija (ograničenost, periodičnost, parnost i monotonost).
6. Primeri nekih realnih funkcija (linearna, kvadratna, racionalna, eksponencijalna, logaritamska funkcija).
7. Matrice (definicija, zbir i proizvod matrica, osobine operacija sa matricama)
8. Determinanta (definicija, izračunavanje).
9. Inverzna matrica (definicija, izračunavanje).
10. Granična vrednost funkcije (definicija, pravila).
11. Asimptote funkcije (definicija i primeri).
12. Neprekidnost funkcije (definicija i osobine)
13. Izvod funkcije (definicija, tumačenje).
14. Izvod proizvoda (dokaz pravila).
15. Izvod količnika (dokaz pravila).
16. Izvod f-je $y = \sin x$ po definiciji, (izvođenje).
17. Izvod f-je $y = \cos x$ po definiciji, (izvođenje).
18. Izvod f-je $y = x^n$ po definiciji, (izvođenje).
19. Izvod $y = \arcsin x$, (izvođenje).
20. Izvod $y = \operatorname{arctg} x$, (izvođenje).
21. Diferencijal funkcije (definicija, tumačenje, pravila).
22. Fermaova teorema (dokaz)
23. Lopitalovo pravilo.
24. Motonost i ekstremne vrednosti funkcije.
25. Konveksnost funkcije i prevojne tačke.
26. Neodređeni integral (definicija, osobine).
27. Integracija metode smena
28. Parcijalna integracija.
29. Integracija racionalnih funkcija.
30. Određeni integral (definicija, geometrijsko tumačenje, izračunavanje).
31. Osobine određenog integrala.
32. Nesvojstveni integrali (definicija, izračunavanje).
33. Funkcije tražnje i ponude (definicije, osobine).
34. Funkcija prihoda (definicija, osobine, granični prihod).
35. Funkcija troškova (definicija, osobine, granični troškovi).
36. Funkcija dobiti (definicija, osobine).
37. Procentni račun (osnovne formule).
38. Prost kamatni račun (osnovne formule).
39. Složen kamatni račun (dekurzivna metoda).
40. Konformna kamatna stopa i odnos između relativne i konformne kamatne stope.
41. Model kombinovanog prostog i složenog kapitalisanja (izračunavanje krajnje vrednosti kapitala i izračunavanje vremena).
42. Složen kamatni račun (anticipativna metoda).
43. Amortizacija kredita metodom jednakih otplata sa dekurzivnom kamatnom stopom.
44. Amortizacija kredita metodom jednakih anuiteta sa dekurzivnom kamatnom stopom.